DM 6 : séries de Fourier, théorème de Dirichlet et développements eulériens

Pour le lundi 4 décembre

I Convergence des séries trigonométriques (synthèse harmonique)

On appelle *série trigonométrique* une série de fonctions dont les sommes partielles sont :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ S_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big) \tag{1}$$

où $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ sont deux suites de nombres complexes et $\alpha_0 \in \mathbb{C}$.

Pourquoi parle-t-on de « synthèse harmonique » : parce qu'on fabrique une fonction (un signal) en superposant des signaux très simples , $t \mapsto a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)$, appelés *harmoniques* (dont la fréquence est la multiple d'une fréquence fondamentale $\omega/(2\pi)$). C'est ce que fait un synthétiseur électronique où vous pouvez pour une même note, régler le *timbre* pour qu'elle sonne comme un piano, un violon, une flûte, ce qui revient à changer les (a_n) et (b_n).

1) **Condition suffisante de convergence**
   a) On suppose que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Justifier que la série définie par (1) converge et que sa somme : $S\ :\ x \mapsto \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n\cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$ est une fonction continue, 2π-périodique, sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer le même résultat qu'au 1a), en supposant cette fois que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} < +\infty$.
   c) Justifier que le résultat de la question 1b) entraîne celui de la question 1a).
2) **Un exemple explicite avec une hypothèse plus faible sur les coefficients**
   On considère la série trigonométrique définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cos(kx) + \frac{i}{k}\sin(kx).$$

   a) Vrai ou faux : pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = -\dfrac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{2\sin(\frac{x}{2})}$ (si faux donner la bonne formule).
   b) On a $S_n(\pi) =: A_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$. Démontrer que $S_n(\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)$.
   c) Vrai ou faux : pour chaque $x \in]0, 2\pi[$, on a : $S_n(x) = A_n - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}dt + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{x} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{\sin(\frac{t}{2})}dt$
   d) On suppose encore que $x \in]0, 2\pi[$, on note $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$. Avec une intégration par partie, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en déduire que $(S_n(x))$ converge quand $n \to +\infty$.
   N.B. On fera spécialement attention à ne pas dire qu'une intégrale tend vers zéro parce que la suite de fonctions à l'intérieur tend vers zéro ! Faire des majorations du module de l'intégrale avec l'I.T. pour les intégrales.
   e) Déduire de ce qui précède que $\forall\, x \in]0, 2\pi[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k} = \dfrac{\pi - x}{2}$ et préciser $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k}$.
   f) Tracer le graphe sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\sigma\ :\ x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k}$.
   La série trigonométrique $\sum \sin(kx)/k$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

3) **Formule de récupération des coefficients en cas de convergence uniforme :**
On suppose que la suite (S_n) définie par (1) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

Montrer qu'alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \quad \text{et} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \tag{2}$$

et $\alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ (on note habituellement $\alpha_0 = a_0/2$).

II En sens inverse : analyse harmonique d'une fonction donnée

Définition – Pour toute fonction f continue par morceaux, 2π-périodique, on appelle *coefficients de Fourier* de f les coefficients (a_k) et (b_k) définis à partir de f par la formule (2) et *série de Fourier de* f la série de sommes partielles définies par la formule (1)

Question cruciale de la théorie de Fourier : à quelle condition une fonction f donnée est-elle la somme de sa série de Fourier ?

Contrairement à ce que vous pouvez penser après vos tp en physique, ce n'est pas toujours vrai !

Mais il y a un beau théorème (on en reparlera au T4 sûrement) qui demande d'abord une :

Définition – Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique, on dit que f est $\mathcal{C}^1$-par morceaux s'il existe une subdivision $x_0 = -\pi < x_1 < \cdots < x_{n-1} < c_n = \pi$ de $[-\pi,\pi]$ telle que $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit $\mathcal{C}^1$ et f et f' admettent une limite finie à gauche et à droite en tous les points x_i. On notera $f \in \mathcal{CM}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Pour $f \in \mathcal{CM}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit la fonction régularisée f_{reg} de f par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{\text{reg}}(x) = \frac{\lim\limits_{y\to x^+} f(y) + \lim\limits_{y\to x^-} f(y)}{2}$$

N.B. En tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est *continue*, on a $f_{\text{reg}}(x) = f(x)$.

Théorème de Dirichlet (admis) si $f \in \mathcal{CM}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont les coefficients de Fourier de f définis par (2), alors la série de Fourier de f converge vers la fonction « régularisée » de f, autrement dit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_{\text{reg}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx),$$

4) **Un premier exemple, avec un air de déjà vu :**

a) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f telle que $\forall\, x \in]0,2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ et $f(0) = 0$.

b) Justifier que le théorème de Dirichlet s'applique à f et traduire sa conclusion sur cet exemple.

III Une belle formule d'Euler

Culture : *L. Euler a découvert un certain nombre de formules qui généralisent à des fonctions « transcendantes » (pas polynomiales ni rationnelles) des formules de factorisations ou de décompositions en éléments simples bien connues pour les polynômes ou les fractions rationnelles. Celle que nous allons voir ici concerne la fonction* cotan : $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z} \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Les « pôles » de cette fonction sont bien sûr les $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et Euler a découvert qu'on pouvait « en un certain sens » décomposer en éléments simples :

$$\operatorname{cotan}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x - k\pi}, \tag{3}$$

sauf que :

5) **Problème :** La formule (3) n'a pas de sens, pourquoi ?

Quand on s'appelle Euler, on passe outre ce genre de problème, il suffit de regrouper les termes par paire de k opposés et merveille on va montrer que cela marche, et cela de deux façons différentes. Bref, on va montrer plutôt que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right) \tag{4}$$

6) **Démonstration de la formule d'Euler (4) due à Fourier**

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f la fonction 2π-périodique dont la restriction à $]-\pi, \pi]$ est définie par

$$\forall\, x \in]-\pi,\pi], \quad f(x) = \cos(ax).$$

a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

c) Déduire du théorème de Dirichlet que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right)$

7) **Une autre méthode sans Fourier, avec une équation fonctionnelle**

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on veut poser $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x + k}$.

a) Justifier que $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Montrer que f est impaire et 1-périodique.

c) Montrer que f vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad f(2x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(x + \frac{1}{2})\right)$$

d) (i) Montrer que $h : x \in]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - x^2}$ est continue sur $]-1,1[$.

(ii) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(iii) Montrer que $g : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \mapsto f(x) - \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ entier.

e) On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$$

ce qu'on peut réécrire par changement de variable :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \ \operatorname{cotan}(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x - k\pi} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$$

(i) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\tilde{f}(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$. Montrer que $\tilde{f}$ vérifie la *même* équation fonctionnelle vérifiée pour f au c).

(ii) La fonction $g = f - \tilde{f}$ vérifie alors aussi cette équation fonctionnelle. En déduire qu'elle est nulle sur $[0,1]$ en remarquant que g est bornée sur $[0,1]$

(iii) Conclure.