D.M. 5 : Topologie des classes de similitudes de matrices

Pour le lundi 20 novembre 2023

Dans ce problème $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la *classe de similitude* de A est par définition l'ensemble :

$$\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A) := \left\{PAP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\right\}.$$

I Autour des matrices scalaires

1) Donner la classe de similitude d'une matrice scalaire, c'est à dire une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que u n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ libre.
   Attention : ce résultat ne découle pas directement de la négation de la définition de « u est une homothétie », c'est un petit miracle qu'on pourra démontrer par contraposée.
3) En déduire que si A n'est pas une matrice scalaire, alors $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas un singleton, et donc que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est un singleton si, et seulement si, A est une matrice scalaire.
4) Déduire du 2), mieux, que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est *bornée* si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

II Etude, en taille 2×2, des matrices dont la classe de similitude est fermée :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

5) Si $A = \lambda I$, justifier que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est *fermée* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,
6) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas une matrice scalaire :
   a) montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
   b) pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Étudier la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la classe de similitude $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est *pas fermée* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
7) Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$. Soit $\left(P_k A P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.
   a) Étudier la suite $\left(P_k\,(A - \alpha I_2)\,P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $\det(B - \alpha I_2) = 0$.
   b) Montrer alors que $B \in \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ *et conclure que* $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ *est fermée* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,
   c) Retrouver le résultat précédent en considérant plutôt la suite des (χ_{A_k}) où $A_k = P_k A P_k^{-1}$
8) Montrer que $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ssi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
9) Cas des matrices dont le spectre réel est vide.
   a) A l'aide du résultat du 2), montrer que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ qui n'est pas une matrice scalaire est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{Tr}(A) \end{pmatrix}$.
   b) Dans les questions suivantes de ce 9), $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$.
   Justifier que $4\det A - (\mathrm{tr}(A))^2 > 0$.
   c) On considère une suite $\left(P_k A P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En considérant la suites des χ_{A_k} où $A_k = P_k A P_k^{-1}$, montrer que B est semblable à A grâce au 9a).
   d) Conclure que si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ alors $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
10) Conclure sur l'ensemble des matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
11) Retrouver le résultat du 9d) à partir du résultat vu au 7) et du résultat suivant (à démontrer) : pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A) = \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

III Généralisation du résultat du II dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

12) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ l'écriture scindée dans $\mathbb{C}[X]$ de son polynôme caractéristique.
Soit $E = \mathbb{C}^n$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme canoniquement associé. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de trigonalisation de u et $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
    a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque, écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u)$ où $\mathcal{B}_k = (\frac{e_1}{k}, \frac{e_2}{k^2}, \ldots, \frac{e_n}{k^n})$ en fonction de T.
    b) En déduire que la matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vérifie : $D \in \overline{\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)}$.
    c) Que peut-on en déduire pour les matrices A telles que $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
13) Réciproquement supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que (A_k) est une suite de matrices semblables à A telle que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B \in M_n(\mathbb{C})$.
    a) Que dire de χ_B ?
    b) Justifier que μ_A annule B.
    c) Conclure que B est semblable à A.

On a donc bien montré que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, sa classe de similitude est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

IV Une autre caractérisation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: 5/2

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique noté $(.|.)$ la norme associée est notée $\| \ \|$.

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\|A\|_S = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}$ la norme euclidienne canonique sur ces matrices.

14) Justifier que pour toute matrice $U \in O_n(\mathbb{R})$, $\|UAU^{-1}\|_S = \|A\|_S$.

Soit $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à G. On suppose de plus que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(G) \neq \varnothing$.

15) a) Justifier que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(G) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(G)$.
Dans la suite, on désigne par λ et μ les racines de χ_G (éventuellement confondues) ; ce sont les valeurs propres de g. On choisit un vecteur propre u_1' de g, associé à la valeur propre λ, qu'on complète en une base (u_1', u_2') de $\mathbb{R}^2$ et on note (u_1, u_2) la base orthonormée de $\big(\mathbb{R}^2, (\ |\ )\big)$ obtenue en appliquant le procédé de Schmidt à (u_1', u_2').
    b) Rappeler les expressions des vecteurs u_1 et u_2 en fonction des vecteurs u_1' et u_2'.
    c) On note U la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ à la base (u_1, u_2). Montrer que $UU^\top = I_2$.
    d) On note T la matrice de g dans la base (u_1, u_2). Justifier que T est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et que $G = UTU^\top$. Que vaut $\|G\|_S$?
16) **Calcul d'une borne inférieure** On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \varnothing$ et on désigne par λ et μ les valeurs propres de A (éventuellement confondues).
    a) Justifier que l'ensemble $\left\{\left\|PAP^{-1}\right\|_S ; P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\}$ possède une borne inférieure.
    b) Montrer que, pour toute matrice $B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$, $\|B\|_S \geqslant \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$.
    c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel non nul t, la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)$.
    d) Déduire de ce qui précède que $\inf_{B \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$.
    e) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si la borne inférieure de l'ensemble $\left\{\left\|PAP^{-1}\right\|_S ; \quad P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\}$ est atteinte.
17) Hors D.M. : on pourrait montrer que la caractérisation du 16e) s'applique aussi dans le cas où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$.