# D.M. 5 : Topologie des classes de similitudes de matrices, solution

*D'après une épreuve du Concours National Marocain 2008, où j'ai remplacé pas mal de questions « calculatoires » par des méthodes plus conceptuelles.*

1) Si $A = xI_n$ alors pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $PAP^{-1} = PxI_nP^{-1} = xP.P^{-1} = xI_n$.
Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$.
La classe de similitude d'une matrice scalaire est un singleton.

2) Il s'agit du « miracle des homothéties ».
Par contraposée : soit $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ liée.
Autrement dit, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un $\lambda_x \in \mathbb{K}$, tel que $u(x) = \lambda_x x$.
Soit $x, y$ dans $E \setminus \{0\}$, on va montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

- 1ère cas : $x$ et $y$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas, on considère $z = x + y$.
Alors on a un $\lambda_z \in \mathbb{K}$ tel que
$$u(z) = \lambda_z.z = \lambda_z x + \lambda_z y \qquad (1)$$
Mais d'autre part par linéarité de $u$, on a aussi :
$$u(z) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y.y \qquad (2)$$
En comparant (1) avec (2), comme $(x, y)$ est libre, on conclut que $\begin{cases} \lambda_z = \lambda_x \\ \lambda_z = \lambda_y \end{cases}$ et donc que $\lambda_x = \lambda_y$.
- Si $y = \mu x$. Alors $u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x(\mu x) = \lambda_x y$. Ainsi $\lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi on a montré que tous les $\lambda_x$ pour $x \in E$ sont égaux et que $u$ est bien une homothétie.

3) Soit $A$ une matrice non scalaire dans $M_n(\mathbb{K})$. L'endomorphisme canoniquement associé $u$ n'est pas une homothétie. Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ de sorte que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$. Par la question précédente, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ libre. On complète cette famille libre en une base $\mathcal{B}_1 = (x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ de $E$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) =: B_1$ admet pour première colonne $C_1(B_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais si on considère la base $\mathcal{B}_2 = (x, \frac{1}{2}u(x), e_3, \dots, e_n)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) =: B_2$ admet pour première colonne $C_1(B_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les deux matrices $B_1$ et $B_2$ sont donc bien distinctes et toutes les deux dans la classe de similitude de $A$.
On a bien montré que si $A$ n' est pas une matrice scalaire alors $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas un singleton.
On a montré au 1) que si $A$ était une matrice scalaire alors $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est un singleton.
Au total, on a bien l'équivalence demandée.

4) On reprend l'idée et les notations de la démonstration du 2) : $A$ est une matrice non scalaire et $u$ est l'endomorphisme canoniquement associé.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$,dans la base $\mathcal{B}_\lambda = (x, \dfrac{u(x)}{\lambda}, e_3, \dots, e_n)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u :=: B_\lambda$ avec la première colonne de $B_\lambda$ vaut $C_1(B_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais alors $\|B_\lambda\|_\infty \geq |\lambda|$ et donc $\|B_\lambda\|_\infty \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Comme toutes les matrices $B_\lambda$ sont dans $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$, on conclut bien que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas bornée.

Réciproquement, si $A = xI_n$, on sait que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est un singleton, donc bornée.

Au total, on a bien l'équivalence demandée.

5) Si $A = \lambda I$, alors on sait par 1) que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est un singleton, donc est fermée.

6) a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda\}$, on sait que $\chi_A = (X-\lambda)^2$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ et de degré deux et admet une racine seule racine réelle $\lambda$, donc c'est encore $\chi_A = (X-\lambda)^2$.

Donc dans tous les cas, $\chi_A$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ donc on sait que $A$ est trigonalisable dans $M_2(\mathbb{K})$ avec sur la diagonale de la matrice trigonalisée, les valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{K}$ donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3}$$

D'autre part, comme $A$ n'est pas une matrice scalaire, on sait que $\mu \neq 0$.

**Lemme :** les matrices $T_\mu := \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ et $T_1 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

*Dém.* Soit $v$ l'endomorphisme associé à $T_\mu$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{K}^2$. Soit $\mathcal{C} = (\mu e_1, e_2)$ qui est aussi une base de $\mathbb{K}^2$ puisque $\mu \neq 0$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = T_1$ puisque par déf. de $T_\mu$, on a $v(e_2) = \mu.e_1 + \lambda e_2 = 1.(\mu e_1) + \lambda e_2$ et que $v(\mu e_1) = \lambda(\mu e_1)$.

Ainsi $T_1$ et $T_\lambda$ sont bien semblables □

**Application du lemme :** avec le lemme et l'égalité (3), on a bien montré que $A$ est semblable à $T_1$.

b) On calcule $A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Comme les matrices $\mathrm{diag}(2^{-k}, 1)$ et $\mathrm{diag}(2^k, 1)$ sont inverses l'une de l'autre, on sait que $A_k$ est semblable à $T_1$ et donc à $A$.

Donc $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)^{\mathbb{N}}$, mais par déf. de la limite (coordonnée par coordonnée en dim. finie), on sait que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I \notin \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$, sinon $A$ serait la matrice scalaire $\lambda I$.

Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

**Remarque :** Conceptuellement les matrices $\mathrm{diag}(2^{-k}, 1)$ et $\mathrm{diag}(2^k, 1)$ sont des matrices de dilatation. La multiplication à gauche par la première multiplie la première ligne par $2^{-k}$. La multiplication à droite par la seconde multiplie la première colonne par $2^k$.

7) a)Pour tout $k \in \mathbb{N}, P_k\,(A - \alpha I_2)\,P_k^{-1} = P_k A P_k^{-1} - \alpha I_2$, donc par addition des limites :

$$P_k\,(A - \alpha I_2)\,P_k^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B - \alpha I_2.$$

Par continuité de l'application déterminant (polynomiale en chaque entrée de la matrice) :

$$\det(B - \alpha I_2) = \lim_{k\to\infty} \det\left(P_k\,(A - \alpha I_2)\,P_k^{-1}\right) = 0.$$

b) Avec le résultat du a), on sait $\det(B - \lambda I_2) = \det(B - \mu I_2) = 0$ donc $B$ admet $\lambda$ et $\mu$ comme valeurs propres, distinctes, donc $B$ est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ comme $A$.

Donc $A$ et $B$ sont semblable et donc $B \in \mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$.

Ce résultat étant valable pour *toute* matrice $B$ limite d'une suite d'éléments de $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$, on a bien montré que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

c) Comme les $A_k$ sont toutes semblables à $A$ alors $\chi_{A_k} = \chi_A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D'autre part, comme l'application $A \mapsto \chi_A$ est *continue* (car ici, en dimension 2, c'est $A \mapsto X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$ et le déterminant et la trace sont continues), et que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B$, on sait que $\chi_{A_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_B$.

Au total, on a bien $\chi_A = \chi_B$ et donc $B$ admet comme spectre $\{\lambda, \mu\}$ donc a deux v.p. distinctes et donc est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda,\mu)$ comme $A$.

8) Sens $\Rightarrow$ : supposons $A$ dz dans $M_2(\mathbb{C})$ alors

• ou bien $A = \lambda I$ et dans ce cas $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est un singleton donc fermée.

• ou bien $A$ admet deux v.p. distinctes $\lambda, \mu$ et dans ce cas le 7) s'applique pour montrer que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

Sens $\Leftarrow$ par contraposée : supposons que $A$ n'est pas dz dans $M_2(\mathbb{C})$. Alors $A$ admet exactement une valeur propre dans $\mathbb{C}$ et n'est pas de la forme $\lambda I$. Donc on est exactement dans la situation du 6), où on a montré que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

9) a) Soit $u$ canoniquement associé à $A$. D'après le 2), comme $A$ n'est pas une matrice scalaire, il existe un vecteur $x$ de $E = \mathbb{R}^2$ telle que $(x, u(x))$ est libre.

Mais comme $E$ est de dimension deux, $\mathcal{B} := (x, u(x))$ est alors une base de $E$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} := B$.

Mais alors $A$ et $B$ sont semblables donc $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$.

Or par calcul direct, $\mathrm{Tr}(B) = \beta$ et $\det(B) = -\alpha$ donc on peut aussi écrire $B = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{Tr}(A) \end{pmatrix}$ et les matrices $A$ et $B$ sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme $u$ dans des bases différentes.

b) Comme $\mathrm{Sp}(_{\mathbb{R}}A) = \varnothing$ et que $A$ et $B$ sont semblables, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \varnothing$ donc le polynôme $\chi_B = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$ n'a pas de racines réelles donc son discriminant $\Delta = \mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$ est strictement négatif, d'où la conclusion :

$$4\det A - (\mathrm{tr}(A))^2 > 0.$$

c) De même qu'au 7)c), on montre que $\chi_{A_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_B$ et comme tous les $\chi_{A_k}$ sont égaux à $\chi_A$, on a l'égalité $\chi_A = \chi_B$. Donc $B$ admet même trace et même déterminant que $A$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ donc $B$ n'est pas une matrice scalaire. Mais alors par le 9)a) $B$ est aussi semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{Tr}(A) \end{pmatrix}$ comme $A$ et donc $A$ et $B$ sont semblables.

d) Avec le c), on a montré que pour toute suite convergente d'éléments de $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ sa limite est encore dans $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ donc $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est bien un fermé de $M_2(\mathbb{R})$.

10) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas une matrice scalaire (cas trivial étudié au 1). On raisonne sur le nombre d'éléments dans le spectre réel de $A$.

- Si $\mathrm{Sp}(A) = \varnothing$, le 9) montre que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée dans $M_2(\mathbb{R})$.
- Si $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton, le 6) montre que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée dans $M_2(\mathbb{R})$.
- Si $\mathrm{Sp}(A)$ est une paire de deux éléments distincts, le 7) montre que $\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée dans $M_2(\mathbb{R})$.

11) a) **Exercice d'une planche :** soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})$ qui sont *semblables dans* $\mathbb{C}$ i.e. telles qu'il existe une matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = MAM^{-1}$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables dans $\mathbb{R}$.

*Solution de l'exercice :* On a $A = (P+iQ)B(P+iQ)^{-1}$ avec $(P,Q) \in M_n(\mathbb{R})^2$. L'astuce écrire : $A(P+iQ) = (P+iQ)B$.

Alors on a $AP = PB$ et $AQ = QB$ et $det(P + zQ)$ étant un polynôme en $z$, il ne s'annule que pour un nombre fini de complexes, donc il existe en part. un réel $x$ tel que $P + xQ$ inversible et cette matrice donne $A(P + xQ) = (P + xQ)B$.

b) **Application de cet exercice ici :** il dit exactement que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A) = \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme affirmé par l'énoncé.

Si maintenant on est dans la situation du 9), $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Donc d'après le 7), $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée dans $M_2(\mathbb{C})$. Mais alors $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(A) = \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bien un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ par définition des fermés relatifs.

12) a) On note $T = (t_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en notant $\varepsilon_i = \frac{e_i}{k^i}$ on a

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_i) &= \frac{1}{k^i} u(e_i) = \frac{1}{k^i}(t_{1,i}e_1 + \dots t_{i,i}e_i), \\ &= \frac{t_{1,i}}{k^{i-1}}\varepsilon_1 + \dots + \frac{t_{i,i-1}}{k}\varepsilon_{i-1} + t_{i,i}\varepsilon_i \end{aligned}$$

Ceci donne donc la forme de $T_k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u) = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \frac{t_{1,2}}{k} & \dots & \frac{t_{1,n}}{k^{n-1}} \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & \\ & \ddots & & \\ & & t_{n-1,n-1} & \frac{t_{n-1,n}}{k} \\ & & & t_{n,n} \end{pmatrix}$

donc en notant $\mathcal{B}_k = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la matrice $T_k$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}_k$ a tous ses coefficients au moins divisé par $k$ et donc $T_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Avec la forme du a) on voit que $T_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$.

Or, comme $\chi_A = \chi_T$, on sait qu'à l'ordre près, on sait que $(t_{1,1}, \dots, t_{n,n}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Donc $T_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} D$ et donc $D \in \overline{\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)}$.

c) Si $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée, on conclut, qu'avec les notations du b), $D \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)$ et donc $A$ est semblable à la matrice diagonale $D$ donc $A$ est dz.

13) a) Là, on a besoin de montrer en toute généralité le
**Lemme :** L'application $\chi : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X]$ , $A \mapsto \chi_A$ est continue.
**Application du lemme ici :** $\chi_{A_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_B$ mais pour tout $k$, $\chi_{A_k} = \chi_A$ donc $\boxed{\chi_B = \chi_A}$.
**Dém. du lemme :** On propose deux méthodes :
**(M1) fait bien comprendre ce que sont les coefficients du polynôme caractéristique :**
Pour chaque matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k(A)X^k$.où chaque $c_k$ est un polynôme en les coefficients de la matrice. on connaît bien $c_0, c_{n-1}$. On peut en profiter pour être assez explicite sur ces polynômes $c_k$ en fait.
Si on écrit $A = (C_1 \dots C_n)$ où les $\mathrm{C_i}$ sont les vecteurs colonnes de A, et $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{K})$ Alors : $\chi_A = \det(XE_1 - C_1, \dots, XE_n - C_n)$ qui après développement est égal à :

$$\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2}(-1)^{n+k}\lambda_k X^k + (-1)^{n+1}X\sum_{i=1}^{n}\det(C_1, \dots, C_{i-1}, E_i, C_i+1, \dots, C_n) + (-1)^n \det(A)$$

$$\text{où } \lambda_k = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}^{n} \det(C_1, \dots, E_{i_1}, \dots\dots, E_{i_k}, \dots, C_n)$$

Et là on voit bien que chaque $\lambda_k$ est un polynôme en des entrées de $A$.
**(M2)** Assez élégante : On écrit $\chi_A$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ associée à l'interpolation de lagrange aux points $0, 1, \dots, n$.

Alors pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} P(k)L_k$. En particulier $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} \chi_A(k)L_k$

Prouver la continuité de $A \mapsto \chi_A$ revient alors à prouver la continuité des applications composantes $A \mapsto \chi_A(k) = \det(kI - A)$. Mais là il s'agit seulement de la continuité du déterminant car l'application $A \mapsto kI - A$ est bien sûr continue (c'est juste une translation). $\square$

b) *Bien sûr l'égalité des polynômes caractéristiques ne suffit pas à montrer que $B$ est semblable à $A$, on regarde maintenant le polynôme minimal.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu_A(A_k) = 0$ puisque les $A_k$ ont le même minimal que $A$.

Comme $M \mapsto \mu_A(M)$ est une fonction continue (polynomiale), on conclut que $\mu_A(B) = 0$.
c) Comme $A$ est dz, on sait que $\mu_A$ est simplement scindé. Par le b), $B$ admet donc un annulateur simplement scindé donc $B$ est dz.
Mais si $A$ et $B$ sont deux matrices diagonalisables de même polynôme caractéristique, elles admettent les mêmes v.p. avec la même multiplicité géométrique donc sont semblable à la même matrice $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_s)$ où chaque valeur propre est répétée autant de fois que la multiplicité géométrique donc $A$ et $B$ sont semblables.
Ainsi $B \in \mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée.

14) **Culturel :** L'indice $S$ sur la norme fait sûrement référence à Schmidt la norme euclidienne canonique étant alors appelée norme de Schmidt.
On sait que pour tout $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\|A\|_S = \operatorname{Tr}(A.A^\top)$ et que pour $U \in O_2(\mathbb{R})$, $U.U^\top = I_2$.
Donc ici $\|UAU^{-1}\|_S = \operatorname{Tr}(UAU^{-1}(U.A.U^{-1})^\top) = \operatorname{Tr}(UAU^{-1}(U^{-1})^\top A^\top U^\top) = \operatorname{Tr}(UAA^\top U^\top)$ car $U^{-1} \in O_2(\mathbb{R})$.
En outre, avec $\operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM)$ pour toutes matrices $M, N$, on a ici :
$\|UAU^{-1}\|_S = \operatorname{Tr}(U^\top UAA^\top) = \operatorname{Tr}(AA^\top) = \|A\|_S$

15) a) Comme $\chi_G \in \mathbb{R}_2[X]$ si le spectre réel de $G$ est non vide, $\chi_G$ admet au moins une racine réelle donc son discriminant n'est pas strictement négatif, mais positif, et donc toutes ses racines complexes sont réelles.
b) D'après le cours, on a :

$$u_1 = \frac{u_1'}{\|u_1'\|} \text{ et } u_2 = \frac{u_2' - (u_2' \mid u_1)\, u_1}{\|u_2' - (u_2' \mid u_1)\, u_1\|}$$

c) D'après le cours $U$ est une matrice de passage entre deux,bases orthonormées donc $U \in O_2(\mathbb{R})$ donc $U.U^\top = I$.
d) Les vecteus $u_1$ et $u_1'$ étant colinéaires, on sait $u_1'$ est aussi vecteur propre de $g$ pour la v.p. $\lambda$ c'est-à-dire que $g(u_1) = \lambda u_1$, ce qui donne la forme de la première colonne de $T$. Soient $\alpha$ et $\beta$ des scalaires tels que $g(u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2$, donc $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, et nécessairement $\beta = \mu$, puisque le spectre de la matrice triangulaire $T$ se lit sur sa diagonale.
Puisque $U$ est la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2\}$ à la base $\{u_1, u_2\}$, alors $G = UTU^{-1} = UTU^\top$.
Enfin par le 14), $\|G\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2}$.
**Pause conceptuelle :** ce qu'on vient de montrer est que toute matrice (ici de taille 2 mais l'argument est le même en taille $n$) qui est trigonalisable, est en fait trigonalisable en base orthonormée, autrement dit, matriciellement, avec une matrice de passage orthogonale.

16) a) L'ensemble considéré est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 donc elle admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (prop. fondamentale de $\mathbb{R}$).
b) Soit $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, alors par le 15) appliqué à $B$, on a une matrice $U \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$B = U \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} U^{-1}$$

( $\lambda$ et $\mu$ les valeurs propres de $B$, qui sont aussi celles de $A$).
Ainsi $\|B\|_S = \|UTU^*\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2} \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$
c) Si $\lambda \neq \mu$ toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ sont semblable à $\operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ et $A$ aussi.
Si $\lambda = \mu$, ou bien $A = \lambda I$ et on prend $\alpha = 0$, ou bien on prend $\alpha = 1$, et on invoque le lemme de la question 6.
d) D'une part, par le b) :

$$\forall B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A), \|B\|_S \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}. \tag{4}$$

D'autre part $\forall t \in \mathbb{R}^*, M_t := \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$

$\lim_{t\to 0}\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\left\|\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right\|_S = \sqrt{|\lambda|^2+|\mu|^2}$, donc

$$\|M_t\|_S \xrightarrow[t\to 0]{} \sqrt{|\lambda|^2+|\mu|^2}. \tag{5}$$

Avec (4) et (5), on conclut bien que

$$\inf_{B\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2+|\mu|^2}.$$

e) Si $A$ est diagonalisable, alors $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ et donc

$$\inf_{B\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2+|\mu|^2} = \left\|\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right\|_S,$$

donc la borne inférieure de $\left\{\left\|PAP^{-1}\right\|_S / P \in GL_2(\mathbb{R})\right\}$ est atteinte.

Inversement, soit $G \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ telle que $\inf_{B\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \|G\|_S = \sqrt{|\lambda|^2+|\mu|^2}$, Mais d'après la question 15 d), il existe une matrice $U \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $UU^\top = I_2$ et $G = UTU^\top$, donc $T \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ et par conséquent

$$\inf_{B\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2+|\mu|^2} = \|G\|_S = \sqrt{|\lambda|^2+|\mu|^2+|\alpha|^2},$$

donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc $G$ et par conséquent $A$ est diagonalisable.

17) Voir le sujet du concours national marocain, qui complique un peu les choses cependant.