D.M.4 d'après Mines PSI 2016

1) a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on sait que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(A) \neq \varnothing$ car χ_A admet toujours une racine dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss).

Ainsi si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est apropre, on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, on sait que A est trigonalisable et comme 0 est seule v.p. de A, cette trigonalisation donne que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente et donc A est nilpotente.

b) Pour $n = 2$, on peut prendre une matrice A n'ayant pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$. pxtar exemple la matrice de rotation d'angle $\pi/2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$.

Pour $n \geq 2$, on peut prendre une matrice ayant un bloc diagonal 2×2 de la forme précédente et des zéros ailleurs, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(xstA) = \{0, i, -i\}$. La matrice A est apropre dans $M_n(\mathbb{R})$, mais pas nilpotente.

2) a) Avec les notations de l'énoncé, $T_n^{++}(\mathbb{K})$, l'espace des matrices triangulaires supérieures, convient : il est bien de dimension $n(n-1)/2$ car engendré par les $(E_{i,j})_{i<j}$ et tous ses éléments sont nilpotents donc apropre.

b) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Supposons que A admet une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ et que $X \neq 0$ est un vecteur propre associé.

Alors
$$X^\top AX = X^\top(\lambda X) = \lambda(X^T.X) = \lambda\|X\|^2 \tag{1}$$
où $\|X\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Mais d'autre part
$$X^\top AX = (A^\top X)^\top X = (-AX)^\top X = (-\lambda X)^\top X = -\lambda\|X\|^2 \tag{2}$$
en ayant utilisé bien sûr que $A^\top = -A$.

Avec (1) et (2), on conclut que $\lambda = 0$.

On a bien montré que A est *apropre* dans $M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $A_n(\mathbb{R})$ est un s.e.v apropre dans $M_n(\mathbb{R})$.

Remarque ; en considérant plutôt $\overline{X}^\top AX$ on peut montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$. Cf. chapitre R4 pour cette méthode.

D'autre part, $A_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices $(E_{i,j} - E_{j,i})$ pour $1 \leq i < j \leq n$, qui forment une famille libre, donc on a aussi $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

3) La motivation de cette question est simple : on vient d'exhiber deux s.e.v. apropres de $M_n(\mathbb{R})$ de même dimension à savoir $T_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$. La question est alors : peut-on passer de l'un à l'autre par une « similitude matricielle » : ce qui voudrait dire que géométriquement ce serait « le même s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$ » écrit dans des coordonnées différentes de E.

Ici ce n'est bien sûr pas le cas. En effet si $A = PMP^{-1}$ avec M T.S.S. alors la nilpotence de M entraîne celle de A. Or par exemple la matrice de rotation ci-dessus $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais non nilpotente puisque $A^2 = -I$ donc $A^4 = I$, la suite de ses puissances est périodique de période 4.

4) Une matrice S symétrique apropre est donc une matrice symétrique telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{0\}$. Mais comme elle est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle donc en fait nulle. Donc la seule matrice symétrique réelle apropre est la matrice nulle.

5) Soit V un s.e.v. apropre de $M_n(\mathbb{R})$. Alors $S_n(\mathbb{R}) \cap V$ est formé de matrices symétriques apropres, ce qui, par le 4) dit que $S_n(\mathbb{R}) \cap V = \{0\}$.

Mais alors $\dim(V) + \dim S_n(\mathbb{R}) \leq \dim M_n(\mathbb{R})$, et donc $\dim V \leq n(n-1)/2$.

6) Pour $n=1$, les éléments de $M_1(K)$ sont des matrices $1\times 1=(a)$ et le spectre de cette matrice est $\{a\}$ donc dire qu'elle est apropre équivaut à dire que $a=0$.
Donc la seule matrice apropre est la matrice nulle et donc le seul s.e.v apropre est $V=\{0\}$ et alors $C_1(V)=\{0\}$.

7) a) Soit $M‘=K(M)$ un élément de $K(V')$. On veut montrer que $\mathrm{Sp}(M')\subset\{0\}$.
Or $\chi_M(X)=\begin{vmatrix} X-K(M) & 0 \\ -L(M) & X\end{vmatrix}=X\chi_{K(M)}(X)=\chi_{M'}(X).X.$
Ainsi $\mathrm{Sp}(M)=\mathrm{Sp}(M')\cup\{0\}$ et si M est apropre alors $M'=K(M)$ aussi.
Ainsi comme V' est un s.e.v. apropre, on en déduit que $K(V')$ est aussi un s.e.v. apropre.
b) Par hypothèse de récurrence appliquée $K(V')$ apropre en taille $n-1\times n-1$, il existe une colonne $j\in[\![1,n-1]\!]$ telle que $C_j(K(V'))=\{0\}$.
Comme, pour cette valeur de j, on a $C_j(V)\neq\{0\}$, il y a dans V une matrice M dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ième, cette matrice est en particulier dans V', et $K(M)\in C_j(K(V'))$ donc $K(M)=\{0\}$ donc la seule entrée non nulle de M est l'entrée d'indice (n,j) donc $M=aE_{n,j}$ avec $a\neq 0$.
Comme V est un s.e.v., on conclut que $E_{n,j}\in V$.

8) a) Par déf., σ est une bijection de $[\![1,n[\![$ dans lui-même. On considère donc σ^{-1} sa réciproque et l'endomorphisme $u_{\sigma^{-1}}\ :\ \ e_i\mapsto e_{\sigma^{-1}(i)}$.
Alors pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $u_{\sigma^{-1}}(u_\sigma(e_i))=e_i$. Donc $u_{\sigma^{-1}}\circ u_\sigma$ coïncide avec l'identité sur une base de E, donc par linéarité :

$$u_{\sigma^{-1}}\circ u_\sigma=\mathrm{id}_E$$

De même en sens inverse :

$$u_\sigma\circ u_{\sigma^{-1}}=\mathrm{id}_E$$

Ainsi u_σ est inversible et $(u_\sigma)^{-1}=u_{\sigma^{-1}}$.
Remarque : Une autre façon plus conceptuelle de dire cela est de comprendre que l'application $u\ :\ (S_n,\circ)\to(GL_(E),\circ)$, $\sigma\mapsto u_\sigma$ est un *morphisme de groupes.*
b) Par déf. pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]^2$, $(P_\sigma)(i,j)=\begin{cases}1 \text{ si } i=\sigma(j)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$
De même par prop. de la représentation matricielle $(P_\sigma)^{-1}=\mathrm{Mat}(u_\sigma^{-1})$ et par a) cette matrice vaut aussi $\mathrm{Mat}(u_{\sigma^{-1}})=P_{\sigma^{-1}}$, en notant Mat la représentation matricielle dans la base canonique.

9) **(M1) suivant l'indication de l'énoncé** Notons $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M, autrement dit tel que $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
La matrice $P_\sigma=[[e_{\sigma(1)}]_{\mathcal{B}},\ldots,[e_{\sigma(n)}]_{\mathcal{B}}]$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'=(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$.
Notons $M'=P_\sigma^{-1}MP_\sigma=P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on sait par la formule de changement de base que $M'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
Par ailleurs, par définition de M, et pour tout $l\in[\![1,n]\!]$:

$$f(e_l)=\sum_{k=1}^n m_{k,l}e_k.$$

En appliquant cette égalité à l'indice $l=\sigma(j)$, on obtient

$$f\left(e_{\sigma(j)}\right)=\sum_{k=1}^n m_{k,\sigma(j)}e_k$$

Réindexons bijectivement cette somme en posant $k=\sigma(i)$. Il vient

$$f\left(e_{\sigma(j)}\right)=\sum_{i=1}^n m_{\sigma(i),\sigma(j)}e_{\sigma(i)}$$

Finalement, en identifiant, on a $m'_{i,j}=m_{\sigma(i),\sigma(j)}$, ou encore

$$P_\sigma^{-1}MP_\sigma=\left(m_{\sigma(i),\sigma(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

(M2) Par opérations sur lignes et colonnes : La multiplication à droite de $M = (C_1, \dots, C_n)$ (décomposition en colonnes) par P_σ donne $MP_\sigma = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$, puisqu'en terme d'endomorphismes associés $(f \circ u_\sigma)(e_j) = f(e_{\sigma(j)})$..

La multiplication à gauche d'une matrice $N = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ par $P_{\sigma^{-1}}$ donne $P_{\sigma^{-1}}.N = \begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

En effet en transposant $(P_{\sigma^{-1}}N)^\top = N^\top P_{\sigma^{-1}}^\top = N^\top P_\sigma$ et on applique le résultat précédent.

Au total $P_{\sigma^{-1}}MP_\sigma$ se déduit de M en appliquant σ sur les lignes et les colonnes, ce qui donne bien la matrice des $(m_{\sigma(i),\sigma(j)})$.

10) a) Notons $\varphi_\sigma \ : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto P_\sigma^{-1}MP_\sigma$.

L'application φ_σ est linéaire donc $V^\sigma = \varphi_\sigma(V)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ comme image d'un s.e.v. par une application linéaire.

(Il est même de même dimension car φ_σ est bijective).

D'autre part pour tout $M \in V$, les matrices $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ et M étant semblables, elles ont les mêmes valeurs propres, donc comme M est apropre, la matrice $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ l'est aussi.

Ainsi V^σ est bien un s.e.v. apropre de $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, montrons que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$:

Comme $C_{\sigma^{-1}(j)}(V) \neq \{0\}$, on peut trouver une matrice $M \in V$ ayant toutes ses colonnes nulles sauf la colonne d'indice $\sigma^{-1}(j)$.

Mais alors, avec le résultat du 9), la matrice $P_{\sigma^{-1}}MP_\sigma$ a toutes ses colonnes nulles sauf la colonne d'indice j, ce qu'il fallait démontrer.

b) En appliquant le résultat du 7)b) à V^σ au lieu de V, on a un entier $k \neq n$ tel que $E_{n,k} \in V^\sigma$.

Mais alors $E_{\sigma^{-1}(n),\sigma^{-1}(k)} \in V$.

Ainsi pour chaque entier $j \in [\![1, n]\!]$, on fixe une permutation σ telle que $\sigma(j) = n$ et on a alors un entier $f(j) = \sigma^{-1}(k)$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$ et on a bien $f(j) \neq j$ car $k \neq n$ et σ^{-1} est injective.

11) On considère la suite (u_k) définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = f(u_k) \in [\![1, n]\!]$.

Comme cette suite est à valeurs dans un ensemble fini, on peut considérer le plus petit entier $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_s \in \{u_0, \dots, u_{s-1}\}$. Ainsi $u_0, \dots, u_{s-1}$ sont deux à deux distincts.

On note $r \in [\![0, s-1]\!]$ l'unique indice tel que $u_r = u_s$.

Alors en posant $j_1 = u_r, j_2 = u_{r+1}, \dots, j_p = u_{s-1}$, on a bien une famille d'éléments deux à deux distincts dans $[\![1, n]\!]$ vérifiant la condition demandée :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], f\,(j_k) = j_{k+1} \qquad \text{et} \qquad f\,(j_p) = j_1$$

12) La matrice N de l'énoncé s'écrit $N = E_{j_1,j_2} + E_{j_2,j_3} + \cdots + E_{j_p,j_1}$. Comme $j_1, \dots, j_p$ sont deux à deux distincts, a fortiori les couples $(j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_p, j_1)$ le sont aussi.

Donc la matrice N a exactement p entrées avec un 1 et les autres sont nulles.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \ \in \{j_1, \dots, j_p\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Autrement dit, en notant $(E_1, \dots, E_n)$, la base canonique des $M_{n,1}(\mathbb{K})$, $X = E_{j_1} + \cdots + E_{j_p}$.

Par déf. on sait que $E_{i,j}E_k = \delta_{j,k}E_i$ donc ici, $E_{j_1,j_2}X = E_{j_1}$ et $NX = X$.

13) La matrice N est dans V (puisque les $E_{i,f(i)}$ sont dans V d'après la question 10 b)).

Or V est un espace *apropre* donc N ne devrait pas avoir d'autre valeur propre que 0 et on vient de montrer qu'elle admet 1 comme valeur propre, *contradiction.* La preuve par l'absurde du lemme-clef est enfin achevée.

14) On suppose donc f donnée comme une fonction Python `f` qui prend en argument un entier `i` dans $[\![1, n]\!]$ et renvoie `f(i)` également dans $[\![1, n]\!]$ différent de `i`.

15) **N.B.** Les applications K et L considérées dans cette question ont V pour espace de départ.

Par définition $W = \ker(L)$. Par théorème du rang appliqué à $L\,:\,V\ \to M_{1,n-1}(\mathbb{K})$,

$$\dim V = \dim\ker L + \dim\operatorname{Im} L = \dim W + \dim\operatorname{Im} L$$

Or $\text{Im}(L) \subset M_{1,n-1}(\mathbb{K})$, donc $\dim \text{Im}(L) \leq n-1$ donc

$$\dim V \leq \dim W + (n-1). \tag{3}$$

D'autre part si on considère $K_{|W} : W \to K(W)$, son noyau est $\ker(K) \cap W = \ker K \cap \ker L$.
Mais si $M \in V$ et $M \in \ker K \cap \ker L$, alors M a ses $n-1$ premières colonnes nulles, et comme par hypothèse $C_n(V) = \{0\}$, on a alors $M = 0$.
Ainsi $\ker K \cap \ker L = \{0\}$. Mais alors $\ker K_{|W} = \{0\}$ et donc $K_{|W}$ est *injective* et donc $\dim K(W) = \dim(W)$.
Avec ceci et l'égalité (3), on a bien :

$$\dim V \leq \dim K(W) + n - 1.$$

16) L'idée est d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $K(W)$.
En fait, comme V est apropre, W l'est aussi comme sous-espace de V, mais ensuite, par déf. de W, les matrices $M \in W$ s'écrivent $\begin{pmatrix} K(M) & R(M) \\ 0 & a(M) \end{pmatrix}$ et donc $\chi_{K(M)} | \chi_M$ donc les $K(M)$ sont toutes apropres, et donc $K(W)$ est un sous-espace apropre de $M_{n-1}(K)$.
L'hypothèse de récurrence s'applique donc pour dire que $\dim(K(W)) \leq (n-1)(n-2)/2$ et avec l'inégalité de la question précédente, on conclut que $\dim(V) \leq (n-1)(n-2)/2 + n - 1 = (n-1)n/2$.

17) On ne suppose plus $C_n(V) = \{0\}$. **Mais on a le lemme-clef ! ! Il fallait bien qu'il serve celui-là !**
On a donc un $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.
On considère une permutation σ qui échange j et n (transposition).
Alors V^σ est un sous-espace apropre de $M_n(\mathbb{K})$ isomorphe à V et $C_n(V^\sigma) = \{0\}$.
On peut donc appliquer le résultat du 16) à V^σ et conclure que $\dim(V^\sigma) \leq n(n-1)/2$.
Comme $\dim(V) = \dim(V^\sigma)$, on a la conclusion.