Souvenirs du D.S. 1 : accélérons... (ou pas)

L'opérateur Δ de différence finie, itéré :

On note T l'opérateur de décalage d'indice dans l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (Tu)_n = u_{n+1}$$

L'opérateur de différence finie défini par :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$$

vérifie l'égalité d'opérateurs :

$$\Delta = T - \mathrm{id}\,.$$

Comme T et id commutent, par la formule du binôme dans l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$, on sait que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^p = (T - \mathrm{id})^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} T^k$$

Cette égalité d'opérateurs, appliquée à une suite $u \in E$ donne exactement la formule de l'énoncé :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left(\Delta^p(u)\right)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}}$$

Transformation d'Euler : l'idée simple cachée derrière les formules de l'énoncé :

L'idée de base d'Euler est que la somme d'une série alternée convergente :

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \cdots$$

peut se réécrire

$$\begin{aligned} S &= \frac{u_0}{2} + \left(\frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{2}\right) - \left(\frac{u_1}{2} - \frac{u_2}{2}\right) + \left(\frac{u_2}{2} - \frac{u_3}{2}\right) - \left(\frac{u_3}{2} - \frac{u_4}{2}\right) + \left(\frac{u_4}{2} - \frac{u_5}{2}\right) - \cdots, \\ &= \frac{u_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\Delta u)_n \qquad (1) \end{aligned}$$

L'ordre des additions n'a pas changé et donc la valeur de la somme non plus. Comme les termes $u_n/2 - u_{n+1}/2 = (u_n - u_{n+1})/2$ peuvent décroître plus vite vers 0 que les termes u_n originaux, en appliquant cette transformation plusieurs fois de suite, on doit pouvoir accélérer la convergence.

En appliquant une deuxième fois, puis k fois, ce procédé au second membre de (1) :

$$\begin{aligned} S &= \frac{u_0}{2} - \frac{(\Delta u)_1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\Delta^2 u\right)_n \qquad (2) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \left(\Delta^p u\right)_0 + \left(\frac{-1}{2}\right)^N \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\Delta^N u\right)_n\,, \qquad (3) \end{aligned}$$

Restait juste à montrer qu'en faisant tendre $N \to +\infty$ (ah la carte du tendre... si violente) :

$$\boxed{S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \left(\Delta^p u\right)_0}$$

N.B. La formule finalement n'est pas forcément plus utile que la formule (3) en pratique. Exemple pour la série de Leibniz avec $N = 5$ dans (3) donne déjà une belle accélération :

$$\boxed{\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4}{2n+1} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{12}{105} + \frac{48}{945} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 480}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)(2n+11)}}$$