

DEVOIR SURVEILLÉ 2 (4H)

Les calculatrices sont interdites. L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent **un vecteur propre commun**.

Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et n . Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun. La partie IV présente elle une condition nécessaire et suffisante d'une autre nature.

Les parties II, III et IV sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, \mathbb{K} l'ensemble \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} , $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} , 0_n la matrice nulle d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n .

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } MX = 0\},$$

$$\text{Im}(M) = \{MX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$$

$$\text{Sp}(M) \text{ le spectre de } M$$

$$E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$$

$$\text{et } \text{Im}_\lambda(M) = \text{Im}(M - \lambda I_n).$$

Définitions :

- Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,
on dit que \mathbf{e} est un **vecteur propre commun** à A et B si :
 - i) $\mathbf{e} \neq 0$
 - ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$,
 - iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$.
 On définit $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A, B] = AB - BA$.
- Soient f et g , deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$;
on dit de même que \mathbf{e} est un vecteur propre commun à f et g si :
 - i) $\mathbf{e} \neq 0$
 - ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$;
 - iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$.
 On définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : Etude dans un cas particulier

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) a) Déterminer le spectre de A .
- b) Déterminer des vecteurs $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$ et \mathbf{u}_3 tels que $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ soit une base de vecteurs propres de A .

- c) Montrer qu'aucun des éléments de \mathcal{F} n'est un vecteur propre commun à A et B .
- 2) a) Déterminer le spectre de B .
b) B est-elle diagonalisable ?
- 3) a) Déterminer une base de $E_1(A) \cap E_2(B)$
b) Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B .
- 4) a) Vérifier que $[A, B] = C$.
b) Déterminer le rang de C .

Partie II : Une condition nécessaire et des suffisantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

- 5) a) On suppose que \mathbf{e} est un vecteur propre commun à A et B . Montrer que $\mathbf{e} \in \text{Ker}([A, B])$.
b) Que peut-on en déduire sur $\text{rg}([A, B])$ lorsque A et B ont un vecteur propre commun ?

Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété \mathcal{H}** s'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B]).$$

- 6) Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la **propriété \mathcal{H}** .
a) Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
b) En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B .

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{P}_k la **propriété suivante** :

pour tout \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ .

- 7) Vérifier la propriété \mathcal{P}_1 .
- 8) Dans cette question, on suppose que \mathcal{P}_k est vérifiée pour tout entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et que A et B ne vérifient pas la propriété \mathcal{H} .

On note $C = [A, B]$, on suppose que $\text{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A .

- a) Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.
- b) Montrer que $\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$.
- c) Etablir les inégalités suivantes : $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n-1$.

Pour tout $X \in \text{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

- d) Montrer φ et ψ définissent des endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$.
- e) Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B .

- 9) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{P}_n est vraie.

Remarque 1 (utile pour la partie IV) Le cas $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ contient le cas où $[\varphi, \psi] = 0$. Autrement dit, on a aussi montré que si φ, ψ commutent alors elles ont un vecteur propre commun (résultat beaucoup plus élémentaire qu'on pourra utiliser au IV),

Remarque 2 : (pour les vacances) : on peut montrer, mieux, que si $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$ alors φ, ψ sont simultanément trigonalisables.

Partie III : Etude d'un autre cas particulier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.

Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P .

Pour tout polynôme P de E , on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)$.

- 10) a) Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

- b) Montrer que g est un endomorphisme de E .
- 11) a) Vérifier que si P est un vecteur propre de g , alors $\deg(P) \geq n$.
 b) Montrer que $X^n \in E_1(g)$ et déterminer la forme de tous les éléments de $E_1(g)$ ainsi que $\dim E_1(g)$.

Soit $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. On note f^i la composée $f \circ f \circ \dots \circ f$ où f est prise i fois.

- 12) a) Déterminer $\text{Ker}(f^i)$.
 b) Déterminer $\text{Sp}(f^i)$.
 c) Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n + 1$.

On note \mathcal{B}_c la base canonique de E définie par : $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{2n})$.

On note A_n la matrice de f dans la base \mathcal{B}_c et B_n celle de g dans la même base.

- 13) Expliciter les matrices A_n et B_n .
- 14) Dans cette question, on suppose que $n = 1$ de sorte que A_1 et B_1 sont dans $M_3(\mathbb{R})$.
 a) Calculer A_1^2 et A_1^3 .
 b) Calculer les matrices $[(A_1)^i, B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$ et déterminer leurs rangs.
 c) En déduire que la condition nécessaire de la question 5) n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question 9) n'est pas nécessaire.

Partie IV : une condition nécessaire et suffisante pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Le but de cette partie est de montrer la caractérisation suivante.

Propriété : Deux matrices A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ ont un vecteur propre commun si, et seulement si,

$$\bigcap_{(k,l) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} \ker([A^k, B^l]) \neq \{0\}$$

- 15) Justifier que

$$\bigcap_{(k,l) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} \ker([A^k, B^l]) = \bigcap_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} \ker([A^k, B^l])$$

- 16) On sait déjà, comme à la question 5a) que si e est un vecteur propre commun à A et B alors pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $[A^k, B^l](e) = 0$.

Pour montrer l'autre implication de la propriété encadrée, on prend A, B dans $M_n(\mathbb{C})$ quelconques, on note $\mathcal{N} = \bigcap_{(k,l) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} \ker([A^k, B^l])$ et on suppose donc $\mathcal{N} \neq \{0\}$.

- a) On fixe un vecteur $x \in \mathcal{N}$ et on considère l'espace $\mathcal{N}_x = \text{Vect}(\{A^k B^l x, (k, l) \in \mathbb{N}^2\})$.
 Montrer que \mathcal{N}_x est stable par A et B .
 b) Montrer que pour tout $y \in \mathcal{N}_x$, $AB y = BA y$ et conclure que A et B ont un vecteur propre commun.
- 17) En considérant la matrice définie par bloc suivante, formée de $(n-1)^2$ blocs

$$L = \begin{pmatrix} [A, B] \\ [A, B^2] \\ \vdots \\ [A, B^{n-1}] \\ [A^2, B] \\ \vdots \\ [A^{n-1}, B^{n-1}] \end{pmatrix}$$

justifier qu'il existe un algorithme, dont vous donnerez un ordre de grandeur de la complexité en fonction de la taille n de A et B , qui teste la condition de la propriété encadrée.

N.B. On ne demande aucun code. On pourra donner sans justification la complexité du calcul du produit de deux matrices de taille n . On en déduira la complexité du calcul de L , puis du calcul à effectuer sur L .