Devoir surveillé 2 d'après CCINP PC 2013 : solutions

1) a) On calcule les valeurs propres de A avec l'équation $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (\lambda+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (\lambda+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (\lambda+2)\cdot(\lambda-1)^2$$

où (1) s'obtient par $C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3$ puis factorisation du $(\lambda+2)$, (2) par $L_2 \leftarrow L_2-L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et (3) par la formule du déterminant triangulaire.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, -2\}}$

b) Soit $X = (x,\ y,\ z)^\top$. Alors $X \in E_1(A) \Leftrightarrow (A-I)X = 0 \Leftrightarrow x+y+z = 0$.

Ceci montre que $E_1(A)$ est un plan vectoriel. Alors $\boxed{u_1 = (1,\ 0,\ -1)^\top \text{ et } u_2 = (0,\ 1,\ -1)^\top}$ sont dans $E_1(A)$.

D'autre part $X \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow (A+2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$, (†)

où on a enlevé la troisième ligne du système car $L_1+L_2+L_3 = 0$ donc $L_3 = -L_1-L_2$.

Les deux équations indépendantes de (†) montre que $E_{-2}(A)$ est une droite vectorielle et un vecteur de $E_{-2}(A)$ est $\boxed{u_3 = (1,\ \ 1,\ 1)^\top \in E_{-2}(A)}$.

Comme on sait que les s.e.v. propres sont en somme directe, on sait que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre et comme elle est formée de trois vecteurs, c'est une base de l'e.v $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

c) On calcule : $B.u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{K}u_1, B\cdot u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \notin \mathbb{K}u_2$, et : $B\cdot u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{K}u_3$,

donc aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre de B.

2) a) On calcule de même : $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$ simplement en développant par rapport à la seconde ligne.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{2\}}$

b) Par l'absurde si B était diagonalisable (dz), comme 2 est sa seule v.p., B s'écrirait $B = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = 2I$, or $B \neq 2I$, *contradiction.*

Donc B n'est pas dz

3) a) On calcule $E_2(B)$: $X = (x,\ y,\ z)^\top \in E_2(B) \Leftrightarrow (B-2I)X = 0 \Leftrightarrow x - 3y + z = 0$.

Avec le calcul fait au 1) b), on en déduit que $\in E_1(A) \cap E_2(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-3y-z=0. \end{cases}$

Les deux équations étant indépendantes, elles définissent une droite de $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

En fixant $x = 1$, on obtient $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(v)$ où $\boxed{v = (1, 1, -2)^\top}$ et (v) est la base demandée.

b) S'il y a des vecteurs propres communs à A et B, ils sont :

— ou bien dans $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}\,(v)$, cf. a),

— ou bien dans $E_{-2}(A) \cap E_2(B)$.

Or $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(u_3)$ comme vu à la question précédente et $u_3 \notin E_2(B)$,donc $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$.

Donc les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs non nuls, colinéaires à v.

4) a) Pour être crédible, on calcule $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0, \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Par différence on obtient bien la matrice C de l'énoncé.

b) On peut par exemple remarque que les deux lignes L_1 et L_3 de C sont identiques et que L_2 n'est pas proportionnelle à L_1, donc $\boxed{\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(L_1, L_2, L_3) = 2.}$

5) a) Avec les notations de l'énoncé notons $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$.
$[A, B]e = ABe - BAe = A\mu e - B\lambda e = \lambda\mu e - \lambda\mu e = 0$.
Donc $e \in \ker([A, B])$.

b) On vient de montrer que si A et B ont un vecteur propre commun, alors $\ker([A, B]) \neq \{0\}$ ce qui veut dire que $\boxed{\mathrm{rg}([A, B]) < n.}$

6) a) On sait que la multiplication matricielle est bilinéaire donc ici linéaire à droite et ψ est linéaire. Reste à montrer que $E_\lambda(A)$ est **stable** par ψ.
Or soit $X \in E_\lambda(A)$. D'après la propriété $\mathcal{H}$, on sait que $X \in \ker([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) = \ker(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} - \mathrm{B} \cdot \mathrm{A})$.
Donc : $(A \cdot B - B \cdot A) \cdot X = 0$, donc

$$ABX = BAX \quad (1)$$

Comme par déf. $\psi(X) = BX$, on a donc :

$$\begin{aligned} A \cdot \psi(X) &= BAX \quad \text{par } (1) \\ &= B(\lambda \cdot X) \quad \text{car } X \in E_\lambda(A) \\ &= \lambda BX \\ &= \lambda\psi(X) \end{aligned}$$

ce qui permet d'en déduire que : $\psi(X) \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$.

7) Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension 1 alors tous les endomorphismes de E sont des homothéties. Donc tout vecteur non nul de E est vecteur propre commun à φ et ψ.

8) a) Comme A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$, on sait que $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans $\ker C$. Donc on a un vecteur $u \in E_\lambda(A)$ tel que $Cu \neq 0$, ce qui est exactement la propriété demandée.

b) Comme $\mathrm{rg}(C) = 1$ et que $Cu \neq 0$, on sait que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(Cu)$.
Il suffit donc de montrer que $Cu \in \mathrm{Im}_\lambda(A) = \mathrm{Im}(A - \lambda I)$.
Or $Cu = ABu - BAu = ABu - B\lambda u = (A - \lambda I)Bu$ donc $Cu \in \mathrm{Im}(A - \lambda I)$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}\, C = \mathrm{Vect}(Cu) \subset \mathrm{Im}(A - \lambda I) = \mathrm{Im}_\lambda(A)}$

c) La question précédente prouve que : $\boxed{\dim(\mathrm{Im}\,(A - \lambda \cdot I_n)) \geq \dim \mathrm{Im}\, C = 1}$.
D'autre part : $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(\ker(A - \lambda \cdot I_n)) \geq 1$, puisque λ est valeur propre de A, et le théorème du rang montre alors que : $\boxed{\dim(\mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})) \leq \mathrm{n} - 1}$.

d) Par linéarité de la multiplication, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ est stable par φ et ψ.

- Comme $A - \lambda I$ commute à A, on sait que $\mathrm{Im}_\lambda(A) = \mathrm{Im}(A - \lambda I)$ est stable par l'action de A i.e. par φ.
- Soit $Y \in \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$ On a un $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{n},1}(\mathrm{K})$, tel que $Y = (A - \lambda \cdot I_n)\, X$.
On constate alors que : $B.\,(A - \lambda.I_n)\, X - (A - \lambda.I_n) \cdot B \cdot X = -C.X$, et donc :

$$\psi(Y) = B \cdot (A - \lambda \cdot I_n)\, X = (A - \lambda \cdot I_n) \cdot B \cdot X - C \cdot X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$$

car : $(A - \lambda.I_n) \cdot B.X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, et : $C.X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, d'après la question b).
Donc ψ laisse également stable $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

e) Par le d) φ et ψ sont des endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ et par le c)

$$1 \leq \dim \mathrm{Im}_\lambda(A) \leq \mathrm{n} - 1$$

Enfin si $Y \in \mathrm{Im}([\varphi, \psi])$, on a un $X \in \mathrm{lm}_\lambda(A)$ tel que :

$$Y = \varphi o \psi(X) - \psi o \varphi(X) = A.B.X - B.A.X = [A, B].X$$

Donc $Y \in \mathrm{Im}([A,B])$ et $\mathrm{Im}([\varphi,\psi]) \subset \mathrm{Im}([A,B]) = \mathrm{Im}(C)$, avec : $\mathrm{rg}(C) = 1$, donc

$$\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$$

L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ s'applique donc à φ et ψ et donc il existe un vecteur propre commun dans $\mathrm{Im}_\lambda(A)$) à φ et ψ.
Ce vecteur X vérifie alors : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathrm{K}^2, \varphi(X) = A.X = \alpha.X$, et : $\psi(X) = B.X = \beta.X$, et X est aussi vecteur propre commun à A et B.

9) Attention, il faut terminer proprement la récurrence.
La propriété $\mathscr{P}_1$ est vérifiée.
De plus, si on suppose $\mathscr{P}_\mathrm{k}$ vraie pour : $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n} - 1$, et si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$ (ou deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n), alors :

- si A et B vérifient la propriété $\mathscr{H}$, elles ont un vecteur propre en commun par la question 6) b)
- si A et B ne vérifient pas la propriété $\mathscr{H}$, elles ont aussi un vecteur propre en commun par 8)e).

ce qui montre que $\mathscr{P}_\mathrm{n}$ est vraie et ce qui termine la récurrence.

10) a) C'est immédiat en réindexant :

$$g(P) = X^{2n} \sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k} = \sum_{j=0}^{2 \cdot n} a_{2 \cdot n - j} X^j,$$

avec : $k = 2n - j$.
Culture : $g(P)$ s'appelle le « polynôme aux inverses » de P.

b) Par l'écriture obtenue au a) g est l'application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le vecteur X^k sur le vecteur X^{2n-k}. Or si $k \in [\![0, 2n]\!]$ alors $2n - k \in [\![0, 2n]\!]$ donc E est bien stable par g, donc g est un endomorphisme de E.

11) a) Si P est vecteur propre de g, alors : $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \sum_{j=0}^{2n} a_j X^j = \sum_{j=0}^{2n} a_{2n-j} X^j$.
De plus, P étant non nul, il existe k tel que : $a_k \neq 0$, et donc : $a_k = \lambda a_{2n-k}$, et : $a_{2n-k} \neq 0$.
Or l'un des deux indices (k ou $(2.n - k)$) est plus grand que n, et P comporte un terme d'exposant plus grand que n.
Finalement : $\deg(P) \geq n$.

b) Avec la formule du 10 a), on a bien $g(X^n) = X^n$, et X^n est vecteur propre de g associé à la valeur propre 1 . Plus généralement, $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in E_1(X)$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = a_{2n-k}$.
Culture : De tels polynômes sont dits « symétriques ». La recherche de leur racine se ramène à un polynôme de degré moitié... ce qui est assez pratique.

12) a) Montrons par récurrence que pour tout $i \geq 1$, $\ker f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ l'.e.v. des polynômes de degré au plus $i - 1$.
- $\ker(f) = \mathbb{C}_0[\mathrm{X}]$, puisque : $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, (f(P) = 0) \Leftrightarrow (P' = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{P} \in \mathbb{C}_0[\mathrm{X}])$.
- si pour : $1 \leq \mathrm{i} \leq 2n - 1$, on a : $\ker\left(f^i\right) = \mathbb{C}_{\mathrm{i}-1}[\mathrm{X}]$, alors :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \left(f^{i+1}(P) = 0\right) \Leftrightarrow \left(f^i(f(P)) = 0\right) \Leftrightarrow (f(P) \in \mathbb{C}_{\mathrm{i}-1}[\mathrm{X}]) \Leftrightarrow (P' \in \mathbb{C}_{\mathrm{i}-1}[\mathrm{X}]) \Leftrightarrow (\mathrm{P} \in \mathbb{C}_\mathrm{i}[\mathrm{X}]).$$

b) Avec le a), on sait que $\ker f^{2n+1} = E$ autrement dit que $f^{2n+1} = 0$ donc f (et tous les f^i) est nilpotent donc la seule v.p. possible de f (et des f^i) est zéro (par exemple parce que les v.p. sont racine du polynôme annulateur X^{2n+1}). Et 0 est bien valeur propre car f n'est pas injectif puisque nilpotent.

Donc pour tout i, , $\boxed{\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}}$.

c) D'un côté les vecteurs propres de f^i sont les polynômes de degré au plus $i-1$ par 12) a).
De l'autre côté les vecteurs propres de g tous de degré supérieur ou égal à n par 11 a).
Avec ces deux remarque, on sait que pour que f^i et g aient un vecteur propre en commun, il est nécessaire que : $i \geq n+1$.,
Réciproquement, si $i \geq n+1$, alors X^n est vecteur propre commun à f^i et à g.

13) On commence par calculer les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}_c$ par f et g et :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2.n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & . & . & 0 \\ 0 & . & . & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

14) a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et : } A_1^3 = 0_3.$$

b) On calcule $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et : $[A_1^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

D'où $rg([A_1, B_1]) = 2, \mathrm{rg}([A_1^2, B_1]) = 2$.

c) On constate que : $rg([A_1, B_1]) < 3$, (donc la condition nécessaire de la question 5) b) est vérifiée) et pourtant A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre en commun (vu la question 12) c)).
De même : $rg([A_1^2, B_1]) > 1$, (donc la condition suffisante de la question 9) n'est pas vérifiée) et pourtant A_1^2 et B_1 ont un vecteur propre en commun (vu le 12) c)).

15) Bien sûr, il suffit de montrer que

$$\bigcap_{(k,l)\in[\![1,n-1]\!]^2} \ker([A^k, B^l]) \subset \bigcap_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \ker([A^k, B^l]$$

car l'autre inclusion est évidente.
Soit $x \in \bigcap_{(k,l)\in[\![1,n-1]\!]^2} \ker([A^k, B^l])$ et $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ quelconques.
Alors pour tout $(k,l) \in [\![0, n-1]\!]^2$, $A^kB^l - B^lA^kx = 0$ donc

$$A^kB^lx = B^lA^kx \tag{1}$$

Comme $\deg \mu_A \leq n$ et $\deg \mu_B \leq n$ (Cayley-Hamilton), on sait que $A^r \in \mathrm{Vect}(I, A, \ldots, A^{n-1})$ et $B^s \in \mathrm{Vect}(I, B, \ldots, B^{n-1})$.
On note $A^r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$ et $B^s = \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l B^l$.
Alors $A^rB^sx = \sum_{(k,l)\in[\![0,n-1]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^kB^lx = \sum_{(k,l)\in[\![0,n-1]\!]^2} \alpha_k\beta_l B^lA^kx$ par (1) et donc

$$A^rB^sx = B^sA^rx$$

Donc $x \in \ker[A^r, B^s]$ et ceci pour tout (r,s) d'où l'inclusion demandée.

16) a) Soit $y \in \mathcal{N}_x$, on l'écrit $y = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^k B^l x$.

Alors d'une part $Ay = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^{k+1} B^l x \in \mathcal{N}_x$ donc $\mathcal{N}_x$ est stable par A.

D'autre part $By = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l B.A^k B^l x$ mais comme $x \in \mathcal{N}$ $A^k B^l x = B^l A^k x$, donc $B.A^k B^l x = B^{l+1} A^k x = A^k B^{l+1} x$.

Finalement

$$By = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^k B^{l+1} x \in \mathcal{N}_x \tag{2}$$

donc $\mathcal{N}_x$ est stable par B.

b) Soit $y \in \mathcal{N}_x$ qu'on note encore :$y = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^k B^l x$.

On calcule comme précédemment (avec les mêmes justifications) :
$ABy = A \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^k B^{l+1} x$ par (2) donc

$$ABy = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^{k+1} B^{l+1} x \tag{3}$$

D'autre part : $BAy = B \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^{k+1} B^l x$ et ensuite comme pour la preuve de (2) on utilise la commutation de B avec $A^{k+1}B^l x$ pour conclure qu'on a aussi :

$$BAy = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]^2} \alpha_k\beta_l A^{k+1} B^{l+1} x \tag{4}$$

En comparant (3) et (4) on a bien $ABy = BAy$.

Pour conclure : $y \mapsto Ay$ et $y \mapsto By$ sont deux endomorphismes de $\mathcal{N}_x$ qui commutent donc admettent un vecteur propre commun dans $\mathcal{N}_x$.

Remarque : $\mathcal{N}_x$ est le plus petit sous-espace stable par A et B contenant x sur lequel A et B commutent. A l'inverse $\mathcal{N}$ est le plus grand sous-espace stable par A et B sur lequel A et B commutent.

17) Le produit de deux matrices $n \times n$ se fait avec une triple boucle et est de complexité $O(n^3)$. Donc le calcul d'un crochet $[A,B] = AB - BA$ est aussi en $O(n^3)$ car le calcul de la différence est en $O(n^2)$

Mais pour le calcul des $[A^k, B^l]$ on doit en plus calculer les puissances des matrices A et B ce qui augmente la complexité mais si on utilise un algorithme d'exponentiation rapide le nombre de multiplications dans le calcul de A^k est de l'ordre de $\log_2(k)$ donc la complexité pour $[A^k, B^l]$ avec $k \le n$ et $l \le n$ serait en $O(n^3 \ln(n))$. Si on ne connaît pas l'exponentiation rapide, on tombe déjà sur un $O(n^4)$K

Ici pour calculer la matrice L on doit faire $(n-1)^2$ calcul de crochets Donc la complexité du calcul de L est en $O(n^5 \ln(n))$ ou $O(n^6)$ (c'est beaucoup) !

La raison d'être de la matrice L de l'énoncé est que le noyau de la matrice L est l'ensemble des vecteurs $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\forall\ (k,l) \in [\![1, n-1]\!]^2$, $[A^k, B^l]X = 0$, autrement dit :

$$\ker(L) = \mathcal{N}$$

La condition $\mathcal{N} \neq \{0\}$ du théorème équivaut donc à $\mathrm{rg}(\mathcal{N}) < n$ par théorème du rang.

Or, on sait qu'il existe un algorithme de calcul du rang d'une matrice, qui consiste à échelonner cette matrice. . Si la matrice est de taille $m \times n$, (en négligeant le coût du reordonnement par rapport au coût des opération de transvection $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) on va :

- Pour chaque opération de type $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ on a une complexité $O(n)$.
- On va retrancher la ligne 1 à toutes les autres, ce qui va donc couter $O(m \times n)$.
- On va ensuite recommencer en retrancher L_2 aux suivantes, avec encore un $O(m \times n)$.

— Ainsi de suite, pour un total en $O(m^2 \times n)$.

Pour notre matrice L qui a $m = (n-1)^2 \times n$ ligne, cela fait une complexité énorme encore en $O(n^7)$.