MP 2 **Samedi 23 Septembre 2023**

Devoir surveillé 1 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.), l'usage de stylos à encre effaçable et des blancs de correction sont interdits. Les couleurs autorisées sont le bleu et le noir, le rouge est toléré pour les encadrés. Encadrez ou soulignez vos résultats, séparez clairement vos questions, la clarté de votre présentation est un élément d'appréciation.

Méthodes d'accélération de convergence

Idée générale : Lorsqu'une suite (u_n) converge vers une limite ℓ, une *méthode d'accélération de convergence* de (u_n) est une méthode qui permet de remplacer (u_n) par une suite (v_n) déduite de (u_n) et dont le calcul n'est pas beaucoup plus compliqué que celui de (u_n), ayant la propriété que $(v_n - \ell) = o(u_n - \ell)$ donc qui converge *plus vite* vers ℓ que (u_n).

Présentation du sujet : L'exercice est *complètement indépendant* du reste du problème, même si la thématique est commune. Le coeur du problème s'intéresse à une méthode de calcul de la somme d'une série alternée qui peut (ou pas) accélérer sa convergence.

Exercice : accélération de convergence de suites

1) La méthode du développement limité : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$.
   a) Déterminer un équivalent simple de $e - u_n$ quand $n \to +\infty$.
   b) Une méthode *d'accélération* de convergence de (u_n) consiste à remplacer (u_n) par la suite (v_n) définie par
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (1 + \frac{\alpha}{n}).u_n$$
   où $\alpha \in \mathbb{R}$ est bien choisi ici pour que $v_n - e = O(1/n^2)$.
   Justifier qu'un tel α existe ici, et expliciter le.
2) Pour ce qui est d'approximer e, la méthode du 1) reste de précision très inférieure au calcul de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer en effet que : $S_n - e = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)$.
3) La méthode de Richardson, sur l'exemple d'une convergence géométrique.
   Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un ℓ avec une « convergence géométrique de rapport λ » avec $|\lambda| \in]0,1[$, *c'est-à-dire* telle que $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.
   Soit (v_n) la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$.
   a) Montrer que (v_n) converge « plus vite » vers ℓ que (u_n) c'est-à-dire que $v_n - \ell = o(u_n - \ell)$.
   b) On suppose que (u_n) admet un développement asymptotique de la forme $u_n = \ell + \lambda^n + \mu^n + o(\mu^n)$ avec $|\lambda| > |\mu|$. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1} - \ell}{v_n - \ell}$.

Problème : Accélération de convergence de séries alternées

On note E l'espace vectoriel des suites réelles. La suite réelle de terme général u_n sera notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $v = \Delta(u)$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (\Delta(u))_n = u_{n+1} - u_n$$

Dans la suite, on pourra noter Δu plutôt que $\Delta(u)$ pour alléger l'écriture.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note Δ^p le p-ième itéré de Δ défini par

$$\Delta^0 = \mathrm{id}_E, \quad \forall p \in \mathbb{N},\ \Delta^{p+1} = \Delta \circ \Delta^p.$$

I Préliminaires sur l'opérateur Δ

1) Montrer qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge si et seulement si $\sum(\Delta u)_n$ converge.
2) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Dans cette question on pose pour tout naturel $n, u_n = f(n)$.
   a) Montrer que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x \in]n, n+1[,\ (\Delta u)_n = f'(x).$$
   b) Montrer plus généralement que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, x \in]n, n+p[,\ (\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x).$$
   On pourra raisonner par récurrence en considérant la fonction $x \mapsto g(x) = f(x+1) - f(x)$ et la suite de terme général $v_n = g(n)$.
3) **Calcul de Δ^p :**
   a) Avec la définition : écrire une fonction Python `Delta_iteree(p,u)` qui prend en argument un entier `p` et une liste `u` $= [\mathtt{u_0}, \mathtt{u_1}, \ldots, \mathtt{u_n}]$ avec $n \geq p$, représentant les premiers termes d'une suite u et qui renvoie $\Delta^p u(0)$.

   On définit T l'endomorphisme de E de E par
   $$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, (T(u))_n = u_{n+1}$$
   b) Ecrire une relation simple entre Δ, T et id.
   c) En déduire que pour tout $u \in E, p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,
   $$(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} u_{n+k}$$

II Suites complètement monotones (C.M.) : premiers exemples

Définition : On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *complètement monotone* si :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ (-1)^p (\Delta^p u)_n > 0$$

4) Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1}$ alors u est complètement monotone.
5) Soit $b \in]0,1[$. Dans cette question on pose pour tout naturel $n, u_n = b^n$.
   Utiliser le 3) pour calculer $(\Delta^p u)_n$ pour tous p et n et en déduire que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

III Une famille des suites C.M. : accélération de convergence

Soit ω une fonction continue et positive sur $[0,1]$ non identiquement nulle.
Dans toute cette partie III, on considèrera la suite u de terme général :
$$u_n = \int_0^1 t^n \omega(t) dt.$$

6) **Complète monotonie :**
   a) Montrer que pour tous naturels p et n
   $$(-1)^p (\Delta^p u)_n = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t) dt$$
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.
7) **Accélération de convergence de la série alternée associée :**
   a) Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt$$

b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)dt$$

c) Les 5/2 démontrent et les 3/2 admettent que :

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)dt = \sum_{p=0}^{\infty}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)dt$$

d) En déduire (pour tout le monde) que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\left(\Delta^p u\right)_0$$

8) **Un exemple très simple illustrant ici l'accélération de convergence**

a) *A l'aide des questions précédentes, montrer les égalités :*

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

b) On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |R_n| \geq (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

c) Justifier alors que le remplacement de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ par $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$ est une « accélération de la convergence ».

IV Généralisation : transformée d'Euler

Hypothèses et notation : Dans cette partie IV on se donne une suite *quelconque* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **telle que la série de terme général $\boldsymbol{(-1)^n u_n}$ soit convergente** et on note S sa somme. **On ne suppose aucune autre propriété particulière de la suite $\boldsymbol{(u_n)}$** . Le but est de démontrer que la formule :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\left(\Delta^p u\right)_0$$

vue pour les suites particulières du III est encore vraie dans ce cadre général.

On dira que la série $\sum \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\left(\Delta^p u\right)_0$ est la **transformée d'Euler** de la série $\sum(-1)^k u_k$.

9) a) A l'aide de la partie I, montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty}\left(\Delta^p u\right)_n = 0$$

b) Montrer que pour tout suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle on a

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k = 0$$

c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}\left(\Delta^p u\right)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right)$$

10) a) Montrer d'autre part que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}\left(\Delta^p u\right)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\left(\Delta^p u\right)_0$$

Indication – On pourra remplacer $(\Delta^{p+1}u)_n$ par $(\Delta^p u)_{n+1} - (\Delta^p u)_n$.

b) On pose pour tout entier naturel r

$$E_r = \sum_{p=0}^{r} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \left(\Delta^p u\right)_0 = \sum_{p=0}^{r} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} \left(\Delta^p u\right)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} \left(\Delta^{p+1} u\right)_n \right)$$

Simplifier la somme double écrite dans le membre de droite pour en faire une somme simple.

c) On rappelle qu'on a noté $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

Montrer alors que

$$E_r - S = \frac{-1}{2^{r+1}} \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} \sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n u_n,$$

11) Conclure qu'on a bien $S = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \left(\Delta^p u\right)_0$.

Remarque : malgré le facteur $1/2^{p+1}$ cette formule ne représente pas forcément une *accélération* de la convergence, suivant le comportement du facteur $\left(\Delta^p u\right)_0$.