D.M.4 : Sous-espaces d'endomorphismes « apropres »

Pour le lundi 6 novembre 2023

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne un corps quelconque.

Définition 1 : On dira (terminologie non standard) qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est *apropre* dans $\mathbf{K}$ ssi A n'a pas de valeur propre non nulle dans $\mathbf{K}$, autrement dit que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(A) \subset \{0\}$. Bien sûr, deux cas sont possibles $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(A) = \varnothing$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(A) = \{0\}$.

Définition 2 : On dire qu'un s.e.v. V de $M_n(\mathbf{K})$ est un s.e.v. apropre si, et seulement si, tous les éléments de V sont apropres.

Le but de ce petit problème est de démontrer le résultat suivant :

Théorème principal : Soit V un s.e.v. apropre de $M_n(\mathbf{K})$ alors $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Etude préliminaires d'exemples :

1) a) Justifier que si $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ les matrices apropres sont exactement les matrices nilpotentes.
   b) Donner un exemple de matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ apropre et non nilpotente.
2) a) Donner un exemple de s.e.v. V de $M_n(\mathbf{K})$ formé de matrices toutes nilpotentes, tel que $\dim(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
   b) On note $A_n(\mathbb{R})$ l'e.v. formés des matrices réelles antisymétriques. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ est un s.e.v. apropre de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
   Indication pour les 3/2 : montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top.A.X = 0$, cela sera mieux compris au chapitre R4 et j'espère par les 5/2.
3) Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\mathrm{A}_n(\mathbf{R}) = \left\{PMP^{-1} \mid M \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})\right\}$$

où $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes.
Indication – on pourra commencer par le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice du 1b).

Le cas facile où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

4) On admet que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$. En déduire l'ensembles des matrices $S \in S_n(\mathbb{R})$ qui sont *apropres.*
5) En déduire la preuve du théorème principal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Un lemme clef (et sa longue preuve)

Notation : Étant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{C}_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ième.

Dans ce qui suit, on va démontrer le :

Lemme clef : Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ apropre, il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{C}_j(V) = \{0\}$.

6) **Initialisation** Justifier que le lemme-clef est vrai dans le cas $n = 1$.

Pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ avec $n \geqslant 2$, on notera $K(M) \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$, $R(M) \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbf{K})$, $L(M) \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ et $a(M) \in \mathbf{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right] \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : V \to \mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : V \to \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$, évidemment linéaires.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme-clef vrai pour l'entier $n-1$. **On se donne un sous-espace vectoriel apropre V de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$.** On raisonne par l'absurde en supposant que $\mathrm{C}_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right]$$

7) a) Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel apropre de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$.

b) En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$ où $(E_{i,j})$ désigne la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$.

Soit σ une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} \text{ pour tout } j \in [\![1,n]\!].$$

8) a) Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

b) On note P_σ la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Expliciter P_σ et son inverse.

9) Pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ. (*On pourra utiliser un changement de base.*)

10) a) Montrer que l'ensemble :

$$V^\sigma = \left\{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\right\}$$

est un sous-espace vectoriel apropre de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ et que $\mathrm{C}_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

b) En déduire que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1,n]\!] \backslash \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$.

Avec la question précédente, on a obtenu une fonction

$$f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!].$$

11) En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1,\dots,j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1,p-1]\!], f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1$$

12) Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k,f(j_k)}$.

13) **Conclure (enfin !) la preuve du lemme-clef par récurrence !**

14) **Bonus :** Ecrire un algorithme qui permette d'identifier les suites du 11) connaissant les valeurs de f.

Démonstration générale du théorème principal

On va ici prouver l'inégalité du théorème par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose l'inégalité du théorème établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel apropre de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K : V \to \mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : V \to \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}$$

Jusqu'à la question 16) incluse, on suppose que $\mathrm{C}_n(V) = \{0\}$.

15) Montrer que : $\dim V \leqslant \dim K(W) + (n-1)$.

16) En déduire que : $\dim V \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $\mathrm{C}_n(V) = \{0\}$.

17) Démontrer que : $\dim V \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.