Souvenirs DM 3 : projecteurs, endo. de rang un, Skolem-Noether

Le théorème à la fin : cas particulier du thme de Skolem-Noether (1927)

Théorème du D.M : . Les seuls automorphismes de l'algèbre $(M_n(K), +, \times, \cdot)$ sont les « automorphismes intérieurs » c'est-à-dire ceux de la forme $M \mapsto PMP^{-1}$.

En allant sur Wikipédia, une version un peu plus générale :

Théorème : Les seuls automorphismes d'une K-algèbre centrale simple sont intérieurs.

Centrale : le centre de l'algèbre $\mathcal{A}$ est réduit à $K.1_{\mathcal{A}}$. **Simple :** les idéaux bilatères sont triviaux.

Vérifier ces deux propriétés pour $\mathcal{A} = M_n(K)$ constitue deux exercices classiques en prépa.

La preuve de Wikipédia : cinq lignes avec plein de produit tensoriels $\otimes$ pour faire peur.

La preuve du D.M. : plus touristique. Les produits tensoriels sont cachés dans les $u_{\varphi,\varepsilon} = \varepsilon \otimes \varphi$.

Les héros de la preuve : les endomorphismes de rang un

Pour toute forme linéaire φ non nulle et tout vecteur non nul ε, on définit l'endomorphisme :

$$u_{\varphi,\varepsilon} = (\varepsilon \otimes \varphi) : x \mapsto \varphi(x).\varepsilon.$$

On obtient ainsi tous les endomorphismes de rang un ! Noter l'analogie avec le fait que :

toute matrice M de rang un s'écrit $M = C.L$ avec C une colonne, L une ligne.

Parmi eux il faut distinguer les projecteurs et les nilpotents, bien connaître l'alternative...

Une base « naturelle » de $\mathscr{L}(E)$ si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E est fixée :

- savoir ce qu'est *sa base duale* $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ dans $E^* = \mathscr{L}(E, K)$: $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!],\ e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.
  La matrice de e_i^* dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice ligne $(0 \dots 0\,1\,0 \dots 0)$.
- la famille des $(e_i \otimes e_j^*)_{i,j}$ est la base de $\mathscr{L}(E)$ telle que $\forall\, i, j \in [\![1, n\ ]\!]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i \otimes e_j^*) = E_{i,j}$.

L'idée de la preuve :

- Un automorphisme d'algèbre A dans $\mathscr{L}(E)$ envoie un projecteur sur un projecteur (facile), mieux un projecteur de rang un sur un projecteur de rang un (obtenu ici avec l'ordre sur les projecteurs mais on pourrait s'en passer avec le point suivant).
- Mieux, en notant $p_i = e_i \otimes e_i^*$, la propriété $p_1 + \dots + p_n = \mathrm{id}_E$ avec $p_i \circ p_j = \delta_{i,j}$(système complet d'idempotents « orthogonaux ») se transporte par A et permet de montrer que les $A(p_i)$ sont aussi de la forme $A(p_i) = \varepsilon_i \otimes \varepsilon_i^*$, avec $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une nouvelle base de E.
- Le transport par les autres $u_{i,j} := e_i \otimes e_j^*$ qui vérifient à la fois $u_{i,i} \circ u_{i,j} = u_{i,j}$ et $u_{i,j} \circ u_{j,i} = u_{i,i}$ permet alors de montrer que :

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad A(e_i \otimes e_j^*) = \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j^*.$$

- L'idée est que pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $A(u_{i,j})$ agit sur la base des $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, comme $u_{i,j}$ agit sur la base $(e_1, \dots, e_n)$. Ceci va se traduire par la relation $A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.

L'opération $g \circ \square \circ g^{-1}$ « transporte l'action d'une base sur l'autre »

La première partie (très touristique mais des savoir faire essentiels)

- être bien au clair sur ce qu'il suffit de dire pour vérifier « sous-algèbre »
- être irréprochable sur l'ordre des arguments pour toutes les inclusions ker, Im : chaque argument doit être vraiment à côté de l'endroit où on l'utilise...