D.M.3 : Ordre sur les projecteurs et un théorème sur les automorphismes d'algèbres de $M_n(K)$

Pour le lundi 16 octobre 2023

1 Un ordre sur les projecteurs

1) **Un résultat général sur les commutants.**
Soit E un K-espace vectoriel, soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$ appelé le commutant de f. Montrer que : $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$

2) **Un exemple de projecteur :** Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $p \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que p est un projecteur de E et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathrm{Im}(p)$ et une base $\mathcal{B}''$ de $Ker p$. On appelle $\mathcal{B}$ la base de E obtenue en juxtaposant $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

3) **Caractérisation géométrique des éléments de $\mathcal{C}(p)$ pour p projecteur quelconque :**
Soit E un K-espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E.
Montrer que $f \in \mathcal{C}(p)$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, p$ et $\ker p$ sont stables par f.

4) **Retour à l'exemple du 2) :**
On reprend l'exemple du projecteur p du 2) avec la base $\mathcal{B}$ de cette question.
   a) Traduire le résultat du 3) matriciellement en caractérisant les éléments de $\mathcal{C}(p)$ par la forme de leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.
   b) Retrouver le résultat du a) par un pur calcul matriciel (à l'aide de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$).

5) **Un ordre sur l'ensemble des projecteurs :**
Soit E un K-espace vectoriel et $\mathcal{P} = \{p \in \mathscr{L}(E),\ p^2 = p\}$ l'ensemble des projecteurs de E.
Pour tout $(p, q) \in \mathcal{P}^2$, on note $p \leq q$ ssi $p \circ q = q \circ p = p$.
   a) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{P}$.
   b) Justifier que $\leq$ n'est pas une relation d'ordre total dès que $\dim E \geq 2$.

6) **Autour de la condition de commutation :** Montrer que si deux projecteurs p, q commutent alors la composée $p \circ q$ est un projecteur et exprimer son noyau et son image à l'aide de ceux de p et q.

7) **Caractérisation géométrique de la relation $\leq$ dans le cas commutatif ;**
Soit $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :
a) $p \leq q \Leftrightarrow \ker q \subset \ker p$. b) $p \leq q \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Im}\, q$.

8) **Borne sup. de deux projecteurs qui commutent :**
Soient p et q dans $\mathcal{P}$ tels que $p \circ q = q \circ p$.
   a) Montrer que $r = p + q - (p \circ q)$ est un projecteur.
   b) Montrer que r est le plus petit des majorants de $\{p, q\}$ pour l'ordre $\leq$ et que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

2 Formes linéaires et les endomorphismes de rang un :

Soit E un K-e.v. de dim. n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note $e_i^* \ :\ E \to K,\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_i$ la i-ième forme coordonnées.

Pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $u_{i,j}\ :\ E \to E,\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_j e_i$.

9) Deux bases utiles :

   a) Montrer que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E,K)$. Cette base sera appelée la base duale de $\mathcal{B}$. L'espace $\mathscr{L}(E,K)$ est appelé *espace dual* de E et noté aussi E^*.

   b) Montrer que $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{L}(E)$.

10) Pour chaque couple $(\varphi, \varepsilon) \in (E^* \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\})$ on définit une application notée $u_{\varphi,\varepsilon}$ de E dans E par $\forall\, x \in E$, $u_{\varphi,\varepsilon}(x) = \varphi(x)\varepsilon$.

   a) Montrer que $u_{\varphi,\varepsilon} \in \mathscr{L}(E)$, préciser son noyau et son image.

   b) Ecrire les $u_{i,j}$ de la question 9b) comme des $u_{\varphi,\varepsilon}$.

   c) Parmi les $u_{i,j}$ lesquels sont des projecteurs ? Déterminer plus généralement une CNS sur φ et ε pour que $u_{\varphi,\varepsilon}$ soit un projecteur.

11) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1 si, et seulement si, il s'écrit $u = u_{\varphi,\varepsilon}$ pour un certain couple $(\varphi, \varepsilon) \in (E^* \setminus \{0\}) \times (E \setminus \{0\})$.

12) On considère, comme dans la partie 1, l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs dans $\mathcal{L}(E)$ muni de la relation d'ordre définie par $p \le q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$.

   Définition : un projecteur $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ est dit minimal pour $\le$ ssi pour tout $q \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$, si $q \le p$ alors $q = p$.

   Attention à la notion d'élément *minimal* pour l'ordre $\le$ partiel. Cette notion est distincte de celle de *minimum* pour un ordre total. Il ne s'agit pas de dire qu'un p minimal est plus petit que *tous* les q mais seulement qu'il est plus petit que *tous les q qui lui sont comparables.*

   Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

   (i) p est un projecteur de rang 1,

   (ii) p est un élément *minimal* de $\mathcal{P} \setminus \{0\}$ pour la relation $\le$,

   (iii) il existe $(\varphi, \varepsilon) \in E^* \times E$ tel que $p = u_{\varphi,\varepsilon}$ et $\varphi(\varepsilon) = 1$.

3 Un théorème sur les automorphismes de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$

13) Exemple (fondamental) : soit $g \in GL(E)$ et $A : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$, $u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}$.
   Montrer que A est un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$.
   Motivation pour la suite : *Le but du reste du problème est de montrer que* tous *les automorphismes d'algèbre de $\mathscr{L}(E)$ sont de cette forme.*

14) Soit A un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$.

   a) Si $p \in \mathcal{P}$ que dire de $A(p)$?

   b) Si $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ est minimal pour l'ordre $\le$, que dire de $A(p)$?

   c) En déduire qu'il existe une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs de E et une famille $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de formes linéaires sur E telles que :
   $$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ A(u_{i,i}) = u_{\phi_i,\varepsilon_i} \text{ avec } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \phi_i(\varepsilon_i) = 1.$$

   d) Calculer $\phi_i(\varepsilon_j)$ pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. (On pourra considérer $A(u_{i,i}) \circ A(u_{j,j})$).
   En déduire que les familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ sont libres et que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est la base duale de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

15) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

   a) En considérant des composées de $A(u_{i,j})$ avec d'autres applications, déterminer le noyau, le rang, l'image de $A(u_{i,j})$.

   b) En déduire qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\varphi_j,\varepsilon_i}$.

   c) Montrer que pour tout $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, $\lambda_{i,j}.\lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.

16) Montrer qu'il existe une base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de E telle que si on note $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ sa base duale, on ait :
   $$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}.$$

17) Conclure qu'il existe un $g \in GL(E)$ tel que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\quad A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$.
   puis que $A : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$, $u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}$.