

## D.M. 3 : solution

### 1 Un ordre sur les projecteurs

1) a) Montrons que  $C(f)$  est un s.e.v. de  $\mathcal{L}(E)$ .

(i)  $C(f)$  contient l'application  $0 \in \mathcal{L}(E)$  de manière évidente

(ii) Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$  et  $(g_1, g_2) \in C(f)^2$ .

Alors pour tout  $f \in S$ , par bilinéarité de la composition :  $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = \lambda_1 (g_1 \circ f) + \lambda_2 (g_2 \circ f) = \lambda_1 (f \circ g_1) + \lambda_2 (f \circ g_2)$  car  $g_1$  et  $g_2$  sont dans  $S$ .

En regroupant, on obtient bien que  $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f = f \circ (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$ .

Donc  $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \in C(f)$ .

Avec (i) et (ii) on a montré que  $C(f)$  est un s.e.v. de  $\mathcal{L}(E)$ .

b) Montrons que  $C(f)$  est un sous-anneau de  $\mathcal{L}(E)$ .

(i) Comme on sait déjà que  $C(f)$  est un s.e.v. de  $\mathcal{L}(E)$ , en part. c'est un sous-groupe de  $(\mathcal{L}(E), +)$ .

(ii) On sait que :  $\text{id}_E \in C(f)$ .

(iii) Reste à montrer que  $C(f)$  est stable par  $\circ$  :

Soit  $(g_1, g_2) \in C(f)^2$ . Soit  $f \in S$ .

Alors  $(g_1 \circ g_2) \circ f = g_1 \circ (g_2 \circ f) \stackrel{(1)}{=} g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 \stackrel{(2)}{=} (f \circ g_1) \circ g_2 = f \circ (g_1 \circ g_2)$ .

Notons que (1) et (2) sont vraies car prop.  $g_1 \in C(f)$  et  $g_2 \in C(f)$ .

D'où la conclusion  $g_1 \circ g_2 \in C(f)$ .

Avec (i), (ii), (iii), on a montré que  $C(f)$  est un sous-anneau de  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ .

Au total :  $C(f)$  est une sous-algèbre de  $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ .

2) (i) Pour montrer que  $p$  est un projecteur, il suffit de montrer que  $A^2 = A$ .

Par exemple pour la première entrée de  $A^2$  on a  $1/9(2^2 + 0 \times 1 + (-2) \times (-1) + 0) = 1/9(4 + 2) = 2/3$  qui est bien la première entrée de  $A$ . On calcule ainsi  $A^2$  et on voit que  $A^2 = A$  et donc  $p \in \mathcal{P}$ .

(ii) Pour déterminer une base de  $\text{Im}(p)$  :

En notant  $C_i$  les colonnes de la matrice, on voit que  $C_4 = 0$  et  $C_3 = -C_1$ .

Donc en notant  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ , on sait alors que  $\text{Im } p = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3), p(e_4)) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2))$  et ces deux vecteurs  $p(e_1)$  et  $p(e_2)$  sont indépendants (colonnes non proportionnelles). Donc  $\text{Im}(p)$  admet comme base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  où  $\varepsilon_1 = (2, 0, -1, 0)$  et  $\varepsilon_2 = (1, 3, 1, 0)$ .

(iii) Pour  $\ker p$ . Avec les colonnes, on a  $p(e_4) = 0$  et  $p(e_3) = -p(e_1)$  i.e.  $p(e_3 + e_1) = 0$ .

Cela fournit donc deux vecteurs indépendants  $e_4$  et  $e_3 + e_1$  dans  $\ker p$ . Comme par théorème du rang,  $\dim \ker p = 4 - 2 = 2$ , on sait que  $(e_1 + e_3, e_4)$  est une base de  $\ker p$ .

3) Le sens  $\Rightarrow$  n'utilise pas le fait que  $p$  est un projecteur et est un résultat de cours.

4) a) Par le 3), les éléments de  $\mathcal{C}(p)$  sont exactement les  $f$  tels que  $\ker(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont stables par  $f$ . Cela équivaut à dire que leur matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ où les } * \text{ désignent à chaque fois un nombre quelconque.}$$

b) On sait que la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  de  $p$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pour une matrice  $M = (m_{i,j}) \in M_4(\mathbb{R})$  quelconque  $MP = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 0 & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $PM =$

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc}$$

$$MP = PM \Leftrightarrow m_{4,1} = m_{4,2} = m_{3,1} = m_{3,2} = m_{1,3} = m_{1,4} = m_{2,3} = m_{2,4} = 0$$

Ceci équivaut bien à dire que  $M$  est de la forme  $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$  donnée au a).

5) a) On veut montrer que  $\leq$  est réflexive, antisymétrique, transitive.

(i) Réflexivité : soit  $p \in \mathcal{P}$ . On veut montrer que  $p \leq p$ . Or la relation  $p \leq p$  équivaut à  $p \circ p = p$  ce qui est vrai car  $p$  est un projecteur.

(ii) Antisymétrie : soit  $(p, q) \in \mathcal{P}^2$  tels que  $p \leq q$  et  $q \leq p$ .

On a donc  $p \circ q = q \circ p = p$  et  $p \circ q = q \circ p = q$  donc  $p = q$ .

(iii) Transitivité : soit  $(p, q, r) \in \mathcal{P}^3$  tels que  $p \leq q$  et  $q \leq r$ .

On a donc  $p \circ q = p$  (1),  $q \circ p = p$  (2),  $q \circ r = q$  (3),  $r \circ q = q$  (4).

On veut montrer que  $p \circ r = p$  (5), et  $r \circ p = p$  (6).

• Or en composant par  $r$  à droite dans (1), on a :  $p \circ q \circ r = p \circ r$ .

Avec (3) dans le premier membre de cette égalité, on obtient  $p \circ q = p \circ r$ .

Et de nouveau avec (1), on obtient finalement  $p = p \circ r$  ce qui est bien (5).

• En composant par  $r$  à gauche dans (2), on a :  $r \circ q \circ p = r \circ p$ .

Dans le premier membre de cette égalité, avec (4) on obtient  $q \circ p = r \circ p$  puis avec (2), finalement  $p = r \circ p$  ce qui est (6).

b) Il suffit de trouver deux projecteurs  $p$  et  $q$  non nuls tous les deux tels que  $p \circ q = q \circ p = 0$

Pour cela, on choisit une décomposition de  $E$  en somme directe de deux sous-espaces  $E = E_1 \oplus E_2$  avec  $E_1 \neq \{0\}$  et  $E_2 \neq \{0\}$  et  $p$  le projecteur sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  et  $q$  le projecteur sur  $E_2$  parallèlement à  $E_1$ .

On a alors bien  $p \circ q = q \circ p = 0$  et  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$ .

6) Avec  $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q \circ q \circ p = p \circ q^2 \circ p = p \circ q \circ p = p \circ p \circ q = p \circ q$  on a bien  $p \circ q$  projecteur.

Pour l'image : on a  $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p$  et  $\text{Im}(q \circ p) \subset \text{Im } q$ . Donc ici en posant  $r = p \circ q = q \circ p$ , on a  $\text{Im } r \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$ .

Mais réciproquement si  $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q = \text{Fix } p \cap \text{Fix } q$ , on a  $p \circ q(x) = x$  donc  $x \in \text{Fix}(p \circ q) = \text{Im } p \circ q$ .

Donc on a montré que  $\boxed{\text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q}$ .

Pour le  $\ker$  : on a  $\ker p \subset \ker(q \circ p)$  et  $\ker q \subset \ker(p \circ q)$ , donc ici pour  $r = p \circ q = q \circ p$ , on a  $\ker p + \ker q \subset \ker(r)$ .

Mais réciproquement, si  $x \in \ker r$ , on le décompose en  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in \ker p$  et  $x_2 \in \text{Fix } p$  alors  $p(x) = x_2$  et  $q \circ p(x) = 0$  donc  $q(x_2) = 0$  donc  $x_2 \in \ker q$ . Donc  $x = x_1 + x_2 \in \ker p + \ker q$ .

On a donc montré que  $\ker(p \circ q) = \ker p + \ker q$

7) a) Sens  $\Rightarrow$  : on a  $p \leq q$  et donc  $p \circ q = p$  (1).

Avec la question précédente, comme  $p \circ q = q \circ p$ , on sait que  $p \circ q$  est un projecteur de noyau  $\ker p + \ker q$ .

Avec (1) on a alors  $\ker p + \ker q = \ker p$  ce qui montre bien que  $\ker q \subset \ker p$ .

Bien sûr, on peut aussi faire une preuve indépendante de la question précédente :

Soit  $x \in \ker q$ . Alors  $q(x) = 0$  donc  $p(q(x)) = p(0) = 0$  et avec (1), on a  $p(x) = 0$  donc  $x \in \ker p$ . On a bien montré l'inclusion  $\ker q \subset \ker p$ .

Sens  $\Rightarrow$  : on a  $\ker q \subset \ker p$ .

Soit  $x \in E$ . Comme  $q$  est un projecteur, on sait que  $E = \ker q \oplus \text{Fix}(q)$  et on écrit  $x = x_K + x_I$  avec  $x_K \in \ker(q)$  et  $x_I \in \text{Fix}(q)$ .

Alors  $q(x) = x_I$  et donc  $p(q(x)) = p(x_I)$  (\*).

D'autre part par linéarité  $p$ ,  $p(x) = p(x_K) + p(x_I)$  et comme  $x_K \in \ker q \subset \ker p$ , on en déduit que  $p(x) = p(x_I)$  (\*\*).

Avec (\*\*) et (\*), on a  $p \circ q = p$  et comme  $p$  et  $q$  commutent par hyp. on a bien  $p \leq q$ .

- b) Sens  $\Leftarrow$  : on a  $p \leq q$  et donc  $q \circ p = p$  (2). Soit  $y \in \text{Im } p$ . On a un  $x \in E$  tel que  $y = p(x)$ . Avec (2), on a  $y = q(p(x))$  donc  $y = q(z)$  donc  $y \in \text{Im } q$ . On a bien montré l'inclusion  $\text{Im } p \subset \text{Im } q$ .

Sens  $\Rightarrow$  : on a  $\text{Im } p \subset \text{Im } q$ , c'est-à-dire, comme  $p$  et  $q$  sont des projecteurs  $\text{Fix}(p) \subset \text{Fix}(q)$ .

Soit  $x \in E$ . Comme  $p$  est un projecteur, on sait que  $E = \ker p \oplus \text{Fix}(p)$  et on écrit  $x = x_K + x_I$  avec  $x_K \in \ker(p)$  et  $x_I \in \text{Fix}(p)$

Alors  $p(x) = x_I$  (\*) et donc  $q(p(x)) = q(x_I)$ . Mais comme  $\text{Fix}(p) \subset \text{Fix}(q)$ , on a aussi  $q(x_I) = x_I$ .

Ainsi  $q(p(x)) = x_I$  (\*\*) et donc avec (\*) et (\*\*) on a :  $q(p(x)) = p(x)$ .

On a donc  $q \circ p = p$  et comme  $p$  et  $q$  commutent par hyp. on a bien  $p \leq q$ .

- 8) a) Notons  $r = p + q - p \circ q$ . Alors comme  $p$  et  $q$  commutent et qu'on a vu que le commutant était stable par  $\circ$  tous les termes de la somme commutent entre eux,  $r^2 = (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) = p^2 + q^2 + (p \circ q)^2 + 2p \circ q - 2p \circ (p \circ q) - 2q \circ (p \circ q)$ . Avec  $p^2 = p$ ,  $q^2 = q$  et les commutations, on obtient  $r^2 = p + q + 2p \circ q - 2p \circ q - 2p \circ q = r$  donc  $r \in \mathcal{P}$ .

- b) On veut montrer que :

- (i)  $r$  est un majorant de  $p$  et  $q$ ,
- (ii) tout majorant  $s$  de  $p$  et  $q$  vérifie  $r \leq s$ .
- (iii)  $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(s)$ .

• Pour le (i) (et une partie du (iii)), sachant que  $p$  et  $q$  commutent, avec le 1) on sait que  $r$  commute aussi à  $p$  et  $q$ , et donc par 6) b) il suffit de montrer que  $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(r)$  (1) et  $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$  (2).

Comme les images sont les s.e.v. fixes : soit  $y \in \text{Im}(p) = \text{Fix}(p)$ , on a  $p(y) = y$  et  $r(y) = y + q(y) - (q \circ p)(y) = y + q(y) - q(y) = y$  donc  $y \in \text{Fix}(r)$ .

Comme la déf. de  $r$  est symétrique en  $p, q$ , on a aussi (2) en échangeant les rôles

Ainsi avec 6.b) on sait que  $r$  est un majorant de  $\{p, q\}$  i.e. notre (i).

• Pour le (ii) : soit  $s$  un majorant de  $\{p, q\}$ , on veut montrer que  $r \leq s$  autrement dit que  $r \circ s = s \circ r = r$ .

Comme  $s$  commute à  $p$  et  $q$ , on sait (cf. 1)) que  $s$  commute à  $r = p + q - p \circ q$ .

Si on considère par exemple  $s \circ (p + q - p \circ q) = s \circ p + s \circ q - s \circ p \circ q$ , comme  $s \circ p = p$  et  $s \circ q = q$ , on obtient :

$$s \circ r = p + q - p \circ q = r$$

D'où le (ii).

• Pour le (iii), on a déjà montré pour le (i) que  $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(r)$  (1) et  $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$  (2) et donc (comme  $\text{Im } r$  est un s.e.v.) on a l'inclusion :  $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$ .

Réciproquement : si  $y \in \text{Im}(r)$ , on a un  $x \in E$  tel que  $y = p(x) + q(x) - p(q(x)) = p(x - q(x)) + q(x)$  avec  $p(x - q(x)) \in \text{Im } p$  et  $q(x) \in \text{Im}(q)$  donc  $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ , d'où l'autre inclusion  $\text{Im}(r) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ .

On a bien montré que  $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ .

**Exercice supplémentaire :** Que dire de  $\ker(r)$  ?

## 2 Un détour par les formes linéaires

- 9) a) On considère l'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \rightarrow M_{1,n}(\mathbb{K})$  qui à toute forme linéaire  $\varphi$  associe sa matrice  $(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))$  dans la base  $\mathcal{B}$  au départ (à l'arrivée il s'agit de scalaires, on ne précise donc pas la base d'arrivée de  $\mathbb{K}$  qui est en fait (1)).

On sait d'après le cours que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  est un isomorphisme d'e.v.

On en déduit que la famille  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  car elle s'envoie par  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  sur la base canonique de  $M_{1,n}(\mathbb{K})$ .

- b) On peut donner le même argument qu'au a) avec cette fois l'isomorphisme d'e.v. :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ .

La famille des  $(u_{i,j})$  s'envoie sur la base canonique  $(E_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{K})$ .

C'est donc bien une base.

- 10) a) Soit  $x_1, x_2 \in E$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  dans  $\mathbb{K}$ . Comme  $\varphi$  est linéaire :

$$u_{\varphi, \varepsilon}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2))\varepsilon$$

et par distributivité pour les scalaires, on conclut bien que :

$$u_{\varphi, \varepsilon}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u_{\varphi, \varepsilon}(x_1) + \lambda_2 u_{\varphi, \varepsilon}(x_2).$$

Donc  $u_{\varphi, \varepsilon} \in \mathcal{L}(E)$ .

De manière évidente, pour tout  $x \in E$ ,  $u_{\varphi, \varepsilon}(x) \in \text{Vect}(\varepsilon)$  donc  $\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon}) \subset \text{Vect}(\varepsilon)$ .

D'autre part comme  $u_{\varphi, \varepsilon}$  n'est pas l'application nulle car  $\varphi$  n'est pas l'application nulle,  $\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon})$  est de dim. au moins 1, ce qui donne l'égalité :

$$\text{Im}(u_{\varphi, \varepsilon}) = \text{Vect}(\varepsilon).$$

De même on a trivialement  $\ker(\varphi) \subset \ker(u_{\varphi, \varepsilon})$  et comme de même  $\ker(u_{\varphi, \varepsilon})$  n'est pas égal à  $E$  entier et que  $\ker(\varphi)$  est un hyperplan de  $E$ , on conclut que :

$$\ker(u_{\varphi, \varepsilon}) = \ker(\varphi)$$

- b) On remarque que pour chaque  $(i, j)$ , on a l'égalité :  $u_{i,j} = u_{e_j^*, e_i}$ .

En effet dans la déf. des  $u_{i,j}$  donnée dans l'énoncé, on a :  $\forall x \in E$ ,  $u_{i,j}(x) = e_j^*(x)e_i$ .

- c) On va montrer que  $u_{i,j}$  est un projecteur ssi  $i = j$ . Plus généralement, on va montrer que  $u_{\varphi, \varepsilon}$  est un projecteur ssi  $\varphi(\varepsilon) = 1$  ce qui donne en particulier le résultat pour les  $u_{i,j}$  puisque  $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$ .

Pour cela, on peut utiliser la caractérisation :  $p$  est un projecteur ssi  $p \circ p = p$ .

Ici pour chaque  $x \in E$ ,  $(u_{\varphi, \varepsilon} \circ u_{\varphi, \varepsilon})(x) = \varphi(\varphi(x)\varepsilon)\varepsilon = \varphi(x)\varphi(\varepsilon)\varepsilon$  (\*).

On voit donc déjà que si  $\varphi(\varepsilon) = 1$ , on a bien  $(u_{\varphi, \varepsilon} \circ u_{\varphi, \varepsilon}) = u_{\varphi, \varepsilon}$ .

Réciproquement, si on suppose que  $u_{\varphi, \varepsilon}$  est un projecteur et si on choisit un  $x \in E$  tel que  $\varphi(x) \neq 0$ , avec (\*), on a  $\varphi(x)\varphi(\varepsilon)\varepsilon = \varphi(x)\varepsilon$  et comme  $\varepsilon \neq 0$  et  $\varphi(x) \neq 0$ , on conclut que  $\varphi(\varepsilon) = 1$ .  $\square$

- 11) le sens facile est le sens  $\Leftarrow$  : on a vu au 10 a) que  $u_{\varphi, \varepsilon}$  est de rang 1, d'image  $\mathbb{K}\varepsilon$ .

Sens  $\Rightarrow$  : soit  $u$  de rang 1. Soit  $\varepsilon$  tel que  $\text{Im}(u) = \mathbb{K}\varepsilon$ .

Pour chaque  $x \in E$ , on sait que  $u(x) \in \mathbb{K}\varepsilon$  donc il existe bien un scalaire (unique)  $\varphi(x)$  tel que  $u(x) = \varphi(x)\varepsilon$ . Ceci définit bien une application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ . Reste à montrer que  $\varphi$  est linéaire.

Soit  $x, y \in E$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Alors  $u(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y)\varepsilon$  (1).

Mais comme  $u$  est linéaire, on a aussi  $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda \varphi(x)\varepsilon + \mu \varphi(y)\varepsilon$  (2)

Donc en identifiant (1) et (2), comme  $\varepsilon \neq 0$ , on a :

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

- 12) (i)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $p$  un projecteur de rang 1. Par le 11), comme  $p$  est de rang 1, il s'écrit  $p = u_{\varphi, \varepsilon}$ . Par la question c) (iii), comme  $p$  est un projecteur, on sait que  $\varphi(\varepsilon) = 1$ .

**Mieux :** en fait, la même question c) (iii) (et l'équivalence du 11) montre l'équivalence entre (i) et (iii).

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Soit  $p$  un projecteur de rang 1. Soit  $q \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  tel que  $q \leq p$ .

Par propriété vue de l'ordre  $\leq$ , on sait que  $\text{Im } q \subset \text{Im } p$ . Or comme  $\text{Im } p$  est une droite et que  $\text{Im } q$  n'est pas réduit à zéro, on conclut que  $\text{Im } q = \text{Im } p$ .

De même l'inclusion  $\ker p \subset \ker q$  donne  $\ker p = \ker q$  car  $\ker p$  est un hyperplan et  $\ker q \neq E$ .

Ainsi  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs ayant même image et même noyau donc  $p = q$ .

On a bien montré que  $p$  est minimal pour  $\leq$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) par contraposée : supposons que  $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  n'est pas de rang 1. Il est donc de rang au moins deux. Soit  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$  une base de  $\text{Im } p$  (avec  $r \geq 2$ ) et  $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$  une base de  $\ker p$ .

Soit  $q$  le projecteur sur  $\text{Vect}(\varepsilon_1)$  parallèlement à  $\text{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ .

On a  $q \neq p$ .

Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ . Alors  $p(x) = \sum_{i=1}^r x_i \varepsilon_i$  et  $q(p(x)) = x_1 \varepsilon_1 = q(x)$ .

De même  $p(q(x)) = q(x)$ .

Ainsi  $q \leq p$  avec  $p \neq q$  donc  $p$  n'est pas minimal pour  $\leq$ .

□

### 3 Un théorème sur les automorphismes de l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$

- 13) (i) On montre d'abord que  $A$  est linéaire :

si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ ,  $A(\lambda u + \mu v) = g \circ (\lambda u + \mu v) \circ g^{-1} \stackrel{(*)}{=} \lambda A(u) + \mu A(v)$ , l'égalité  $(*)$  étant vraie car  $\circ$  est bilinéaire.

(ii) Il est immédiat que  $A(\text{id}) = \text{id}$  car  $g \circ \text{id} \circ g^{-1} = \text{id}$ .

(iii) Enfin  $A(u) \circ A(v) = g \circ u \circ g^{-1} \circ g \circ v \circ g^{-1} = g \circ u \circ v \circ g^{-1} = A(u \circ v)$ .

Avec (i), (ii), (iii), on sait que  $A$  est un morphisme d'algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

Enfin,  $A$  est bijective car l'application  $u \mapsto g^{-1} \circ u \circ g$  convient comme réciproque de  $A$ .

- 14) a) Si  $p \in \mathcal{P}$  alors  $p^2 = p$  donc  $A(p^2) = A(p)$  et comme  $A$  est un morphisme pour  $\circ$ , on a  $A(p)^2 = A(p)$ . Donc  $A(p) \in \mathcal{P}$ .

Notons aussi que la réciproque est vraie : si  $A(p) \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  alors  $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  puisque  $A^{-1}$  est aussi un morphisme d'algèbres.

- b) Si  $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  est minimal pour  $\leq$  alors  $A(p)$  est aussi minimal pour  $\leq$ .

En effet : si  $q \leq A(p)$  alors comme  $A$  est bijective, il existe un  $q_1 \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  tel que  $q = A(q_1)$ .

Et la relation  $A(q_1) \leq A(p)$  avec  $A(q_1) \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$  signifie que  $A(q_1) \circ A(p) = A(p) \circ A(q_1) = A(q_1)$  et donc via  $A^{-1}$  on a  $p \circ q_1 = q_1 \circ p = q_1$  et minimalité de  $p$ , on conclut que  $q_1 = p$  et donc  $q = A(p)$  ce qui montre la minimalité de  $A(p)$ .

- c) D'après la question 12, on sait que  $u_{i,i} = u_{e_i^*, e_i}$  est minimal pour l'ordre dans  $\mathcal{P} \setminus \{0\}$ , on sait donc par la question b) précédente que  $A(u_{i,i})$  aussi et donc par la question 12 iii), il existe bien  $\phi_i$  et  $\varepsilon_i$  tels que  $A(u_{i,i}) = u_{\phi_i, \varepsilon_i}$  avec en outre  $\phi_i(\varepsilon_i) = 1$ .

- d) Soit  $i \neq j$ . Comme  $A(u_{i,i} \circ u_{j,j}) = A(0) = 0$ , on a  $A(u_{i,i}) \circ A(u_{j,j}) = 0$ .

Donc  $u_{\phi_i, \varepsilon_i} \circ u_{\phi_j, \varepsilon_j} = 0$ .

En évaluant ces applications sur le vecteur  $\varepsilon_j$  comme  $u_{\phi_j, \varepsilon_j}(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$ , on obtient  $u_{\phi_i, \varepsilon_i}(\varepsilon_j) = 0$ .

Donc si  $i \neq j$ , on a :  $\phi_i(\varepsilon_j) = 0$  car  $\varepsilon_i \neq 0$ .

Ainsi on a  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\phi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$  ( $\dagger$ ).

Montrons que ceci entraîne que les deux familles  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  et  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  sont libres.

• On prend une C.L.  $\lambda_1\varepsilon_1 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n = 0$ .

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on applique  $\phi_i$  à cette égalité, on a  $\lambda_i = 0$ .

• De même avec une CL  $\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n = 0$  et on applique  $\varepsilon_i$ .

**Remarque :** ainsi la relation (†) dit que  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  et  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  sont deux bases, la seconde étant la duale de la première.

- 15) a) (i) Soit  $k \neq j$  :  $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k, \varepsilon_k} = A(u_{i,j}) \circ A(u_{k,k}) = A(u_{i,j} \circ u_{k,k})$  et comme  $j \neq k$ , on obtient  $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k, \varepsilon_k} = 0$ .

Donc en appliquant cette égalité à  $\varepsilon_k$ , on obtient pour tout  $k \neq j$ ,  $A(u_{i,j})(\varepsilon_k) = 0$ .

Donc  $\ker(A(u_{i,j})) \supset \text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j)$ , et comme  $A$  est injectif et  $u_{i,j} \neq 0$ , on sait que  $\ker A(u_{i,j})$  n'est pas  $E$  entier, d'où l'égalité  $\ker(A(u_{i,j})) = \text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j)$  (hyperplan).

(ii) Avec le (i) on sait que  $A(u_{i,j})$  est aussi de rang 1.

(iii) D'autre part  $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i}) = A(u_{i,i}) = u_{\phi_i, \varepsilon_i}$ .

En appliquant cette égalité au vecteur  $\varepsilon_i$ , on obtient  $A(u_{i,j})(A(u_{j,i})(\varepsilon_i)) = \varepsilon_i$ .

Donc  $\varepsilon_i \in \text{Im}(A(u_{i,j}))$ .

Comme  $A(u_{i,j})$  est de rang 1 par le (ii), on sait que  $\text{Im}(A(u_{i,j})) = \text{Vect}(\varepsilon_i)$ .

- b) Par ce qui précède  $A(u_{i,j})$  et  $u_{\phi_i, \varepsilon_i}$  ont le même noyau de dim  $n - 1$  :  $\text{Vect}(\varepsilon_k, k \neq j)$ .

Comme  $\text{Im}(A(u_{i,j})) = \text{Vect}(\varepsilon_i)$ , on a bien un  $\lambda \in K$  tel que  $A(u_{i,j})(\varepsilon_j) = \lambda\varepsilon_i$ .

Suivant l'énoncé, on note ce  $\lambda$  avec les indices :  $\lambda_{i,j}$ .

Mais alors les deux A.L.  $A(u_{i,j})$  et  $\lambda_j u_{\phi_j, \varepsilon_i}$  coïncident sur la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  donc sont égales.

- c)  $\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,k} u_{\phi_j, \varepsilon_i} \circ u_{\phi_k, \varepsilon_j} = A(u_{i,j} \circ u_{j,k}) = A(u_{i,k}) = \lambda_{i,k} u_{\phi_k, \varepsilon_i}$ .

En appliquant cette égalité à  $\varepsilon_k$ , on a bien la relation  $\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$ .

- 16) (i) Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , on note  $\alpha_i = \lambda_{i,1}\varepsilon_i$  (le choix de l'indice 1 est arbitraire ici comme on va le voir ci-dessous).

Comme les nombres  $\lambda_{i,1}$  sont tous non nuls et que  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est une base de  $E$ , on sait que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est une base de  $E^*$ .

(ii) On sait que  $\phi_1, \dots, \phi_n$  est la base duale de  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  par 14 d). Montrons que la base duale de  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est la famille  $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$  où  $\alpha_i^* = \frac{1}{\lambda_{i,1}}\phi_i$ .

Il s'agit de montrer que pour tout  $(i, j)$ ,  $\alpha_j^*(\alpha_i) = \delta_{i,j}$  (\*).

Or pour  $i \neq j$ , c'est évident car  $\phi_j(\varepsilon_i) = 0$  et si  $i = j$ ,  $\alpha_i^*(\alpha_i) = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{i,1}}\phi_i(\varepsilon_i) = 1$ .

Ainsi on a bien montré (\*).

(iii) Montrons que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$ .

Par le 15) b) on sait que  $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j, \varepsilon_i}$  (1).

Or pour chaque  $x \in E$ , par notre définition des  $\alpha_i$  on sait que :

$$u_{\alpha_j^*, \alpha_i}(x) = \alpha_j^*(x)\alpha_i = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}\phi_j(x)\varepsilon_i \quad (2).$$

Par la relation du 15) c), on sait que  $\frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}} = \lambda_{i,j}$ , et on en déduit avec (2) que :

$$\forall x \in E, u_{\alpha_j^*, \alpha_i}(x) = \lambda_{i,j}\phi_j(x)\varepsilon_i \quad (3)$$

En comparant (3) et (1) on a bien montré que  $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \alpha_i}$ .

- 17) Soit  $g \in \mathcal{L}(E)$  définie par  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $g(e_i) = \alpha_i$ .

Comme  $g$  envoie une base de  $E$  sur une base de  $E$ , on sait que  $g$  est bijective.

L'idée est que pour chaque  $(i, j)$ ,  $A(u_{i,j})$  agit sur la base des  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  comme  $u_{i,j}$  agit sur la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ . Ceci va se traduire par la relation  $A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$ .  
L'opération  $g \circ \square \circ g^{-1}$  « transporte l'action d'une base sur l'autre » ...

Montrons l'affirmation du cartouche ci-dessus :

Soit  $x \in E$ . On le décompose en  $x = \sum_{k=1}^n x_k \alpha_k$  sur la base  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Alors on sait par la question précédente que  $A(u_{i,j})(x) = x_j \alpha_i$  (1).

D'autre part :  $g^{-1}(x) = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k$  et donc  $u_{i,j}(g^{-1}(x)) = x_j \varepsilon_i$ .

Finalement  $g(u_{i,j}(g^{-1}(x))) = x_j \alpha_i$  (2).

En comparant (1) et (2), on a bien montré que  $A(u_{i,j}) = g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$  comme annoncé.

Enfin notons  $B : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ ,  $u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}$ .

Par la question précédente, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $A(u_{i,j}) = B(u_{i,j})$ .

Les deux A.L.  $A$  et  $B$  coïncident sur la base  $(u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  de  $\mathcal{L}(E)$  donc sont égales partout.