Souvenirs DM 2 : polynômes en l'opérateur de dérivation

Le héros et l'idée principale :

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{K}[X]$. Notre héros :

$$g := f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f = P(D)(f),$$

où $D : f \mapsto f'$ est l'opérateur de dérivation. Alors la factorisation $P = (X + \mu_1)\dots(X + \mu_n)$ donne une méthode itérative pour calcul g à partir de l'écriture :

$$g = \left((D + \mu_n \operatorname{id}) \circ (D + \mu_{n-1} \operatorname{id}) \circ \cdots \circ (D + \mu_1 \operatorname{id})\right)(f).$$

Applications diverses de cette idée :

Pour les zéros :

- Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ a au moins $(n+1)$ zéros dans I et $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[X]$ a toutes ses racines réelles.

Alors « **Rolle an' Rolle** » il existe un $\zeta \in I$ tel que $f^{(n)}(\zeta) + a_1 f^{(n-1)}(\zeta) + \cdots + a_n f(\zeta) = 0$.

- Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tous les deux *scindés dans* $\mathbb{R}[X]$ où $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Alors (**en comptant les multiplicités**) le polynôme R défini par $R = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

Pour les limites :

Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$ tels que que $f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K}$. Si toutes les racines de $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ sont de partie réelle *strictement négative*,

alors (**Cesaro inside**) $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell / a_n$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour le théorème ultime sur les E.D.L. d'ordre n à coefficients constants :

Soit $(\mathcal{E}) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ une E.D.L. à coefficients $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$, S l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ et $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, alors :

$$S = \ker P(D)$$

et on peut montrer avec le calcul itératif de $P(D)$ le théorème suivant par récurrence :

Théorème – *si on scinde :* $P = \prod_{k=1}^{d} (X - \alpha_k)^{m_k}$ *avec* $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ *deux à deux distinctes, alors :*

$$S = \bigoplus_{k=1}^{d} e^{\alpha_k \square}\, \mathbb{C}_{m_k - 1}[x]$$

Toutefois dans le D.M., on a préféré une preuve plus illuminante que la récurrence avec :

• le théorème de décomposition des noyaux :

$$\ker P(D) = \oplus_{k=1}^{d} \ker(D - \alpha_k \operatorname{id})^{m_k}.$$

• la conjugaison entre opérateurs :

En notant m_α l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto \exp(\alpha x)$:

$$(D + \alpha \operatorname{id}) = m_\alpha^{-1} \circ D \circ m_\alpha.$$

Where next ?

Remplacer l'opérateur D de dérivation par le « décalage (shift) » $S : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ pour obtenir l'analogue du théorème précédent pour les suites récurrentes linéaires d'ordre n.