DM 2 solutions

1) On pourra comparer cette solution à celle de la banque CCINP.

Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, par déf. $e_L(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k L^k$ la puissance de L étant prise pour la composition.

On constate alors que e_L coïncide avec l'unique application linéaire qui envoie la base $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur la famille $(L^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (on rappelle que même en dim. infinie une A.L. est entièrement déterminée par l'image d'une base, et que cette image peut être fixée arbitrairement).

Donc e_L est linéaire. Pour montrer que e_L est un morphisme d'algèbres reste à montrer deux propriétés :

• e_L envoie l'unité de $\mathbb{K}[X]$ sur l'unité de $\mathscr{L}(E)$, autrement dit $e_L(1) = \mathrm{id}$ ce qui est dans la définition de e_L.

• pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $e_L(P\times Q) = e_L(P)\circ e_L(Q) \quad (*)$.

Par linéarité de e_L et bilinéarité du produit dans $\mathbb{K}[X]$ et de la composition dans $\mathscr{L}(E)$, pour montrer $(*)$ il suffit de vérifier cette propriété pour les $P = X^i$ et $Q = X^j$.

Or elle devient triviale. car $X^i \times X^j = X^{i+j}$ et $e_L(X^{i+j}) = L^{i+j} = L^i \circ L^j$ d'où la conclusion.

A méditer : e_L est en fait *le* morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$ qui envoie X sur L. D'autre part, $\mathbb{K}[X]$ est une algèbre « engendrée » par X.

2) Soit $g = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f$ comme dans l'énoncé. D'après les définitions du 1), $Q(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n \,\mathrm{id} \in \mathscr{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ et $Q(D)(f) = D^n(f) + a_1 D^{n-1}(f) + \cdots + a_n f = g$.

Comme $Q(X) = (X+\mu_n)\dots(X+\mu_1)$ et que, par 1), l'application $P \mapsto P(D)$ est un morphisme d'algèbres de $(\mathbb{C}[X],+,\times,.)$ dans $(\mathscr{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})),+,\circ,.)$ on sait que :

$$Q(D) = (D+\mu_n\,\mathrm{id})\circ(D+\mu_{n-1}\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_1\,\mathrm{id}).$$

Ainsi $Q(D)(f) = [(D+\mu_n\,\mathrm{id})\circ(D+\mu_{n-1}\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_1\,\mathrm{id})](f)$.

Or par définition de la composition, on en déduit que :

$$Q(D)(f) = [(D+\mu_n\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_2\,\mathrm{id})]\ ((D+\mu_1\,\mathrm{id})(f)).$$

Or avec les notations de l'énoncé, $(D+\mu_1\,\mathrm{id})(f) = f' + \mu_1 f = f_1$.

Ainsi :

$$Q(D)(f) = [(D+\mu_n\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_2\,\mathrm{id})](f_1) = [(D+\mu_n\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_3\,\mathrm{id})]((D+\mu_2\,\mathrm{id})(f_1)),$$

De même, $(D+\mu_2\,\mathrm{id})(f_1) = f_2$ et on conclut par récurrence immédiate que $Q(D)(f) = f_n$.

Rédaction plus soignée : si on veut rédiger complètement la récurrence. On note $(f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ les fonctions de l'énoncé. On note $H(k)$ la propriété : $f_k = [(D+\mu_k\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_1\,\mathrm{id})](f)$.

On montre par récurrence que $H(k)$ est vraie pour tous les $k\in[\![1,n]\!]$ (récurrence finie).

• Initialisation : $H(1)$ s'écrit $f_1 = (D+\mu_1\,\mathrm{id})(f) = f' + \mu_1 f$ ce qui est vrai.

• H.R. on suppose $H(k)$ vraie pour un $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Alors par définition $f_{k+1} = (D+\mu_{k+1}\,\mathrm{id})(f_k)$ et par H.R. $f_k = [(D+\mu_k\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_1\,\mathrm{id})](f)$ donc $f_{k+1} = (D+\mu_{k+1}\,\mathrm{id})([(D+\mu_k\,\mathrm{id})\circ(D+\mu_1\,\mathrm{id})](f))$.

Donc $f_{k+1} = [(D+\mu_{k+1}\,\mathrm{id})\circ\cdots\circ(D+\mu_k\,\mathrm{id})\circ(D+\mu_1\,\mathrm{id})](f)$ c'est-à-dire $H(k+1)$.

La récurrence est établie.

3) L'hypothèse « P a toutes ses racines réelles » signifie que P admet l'écriture scindée dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(x) = (X+\mu_1)\dots(X+\mu_n),$$

où tous les μ_i sont des réels.

Donc, avec les notations du 2), $g = f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n f$ s'obtient comme $g = f_n$.

Mais l'essentiel est la relation suivante :

$$\boxed{f' + \mu f = (f e^{\mu\square})' e^{-\mu\square}.}$$

Ceci signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f' + \mu f)(x) = e^{-\mu x} \dfrac{d}{dx}(e^{\mu x} f(x))$.

Du point de vue des zéros :

Avec $f_0 = f$ qui a $n+1$ zéros réels, la fonction $e^{\mu \square} f$ a aussi $n+1$ zéros, donc sa dérivée $(e^{\mu \square} f)'$ a au moins n zéros dans $\mathbb{R}$ par théorème de Rolle appliqué entre les zéros successifs, et en multipliant par $e^{-\mu \square}$, on garde les mêmes zéros.

Ainsi la fonction f_1 admet au moins n zéros réels.

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, f_k admet au moins $n + 1 - k$ zéros réels.

En particulier $g = f_n$ admet au moins un zéro réel, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : pour rédiger la réc., noter $H(k)$: « f_k admet au moins $n + 1 - k$ zéros réels ».

4)

a) Notons $d = \deg(P)$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_d$ les racines de P. Alors Rolle appliqué à P entre x_i et x_{i+1} pour $i = 1, \ldots, d-1$ donne qu'il existe un $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$. Ainsi $y_1 < \cdots < y_{d-1}$ sont $d-1$ racines de P' deux à deux distinctes. Or P' est de degré $d-1$ donc P' est scindé à racines simples.

b) Cette fois, il faut compter soigneusement les racines multiples.

Notons $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i}$. Notons $d = \deg(P) \geq 1$ alors $d = \sum\limits_{i=1}^r m_i$.

Pour chaque racine x_i de mult $m_i > 1$ de P, x_i est racine de multiplicité $m_i - 1$ de P'.

Ainsi

$$P' = \left(\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i - 1} \right) Q \quad (*)$$

Ainsi pour montrer que P' est scindé, il suffit de montrer que Q est scindé.

Or $\deg(P') = d - 1$ et $\deg(\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i-1}) = \sum\limits_{i=1}^r (m_i - 1) = (\sum\limits_{i=1}^r m_i) - r = d - r$.

Ainsi $\deg(Q) = \deg(P') - \deg(\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i-1}) = (d-1) - (d-r) = r - 1$.

Enfin, par théorème de Rolle, comme au a), entre chaque racine $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ de P, on a une racine $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ de P'.

Cette racine est une racine de Q vu la déf. $(*)$ de Q.

Ceci montre que Q admet $r-1$ racines distinctes et comme Q est de degré $r-1$, il est simplement scindé.

Avec $(*)$, ceci permet de conclure que P est bien scindé.

c) Le cas $\lambda = 0$ est le b) précédent. On supposera donc $\lambda \neq 0$. On note $P = \mu \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i}$.

- D'une part chaque racine x_i de mult. $m_i > 1$ de P donne une racine de multiplicité $m_i - 1$ de Q (car c'est une racine de mult. au moins $m_i - 1$ des deux polynômes P' et λP). Donc

$$P' - \lambda P = \left(\prod_{i=1}^r (X - x_i)^{m_i - 1} \right) S \quad (1)$$

  où $S \in \mathbb{R}[X]$ est de degré r (idem ci-dessus sauf que $\deg(P' - \lambda P) = \deg(P)$).
- D'autre part, si on note $\forall\, x \ \in \mathbb{R}$, $f(x) = P(x) e^{-\lambda x}$, on a $f'(x) = [P'(x) - \lambda P(x)] e^{-\lambda x}$.

  Or f a les mêmes zéros que P, qu'on note $x_1 < \cdots < x_r$ et par Rolle ces r zéros vont donner $r - 1$ zéros de f', donc $r - 1$ zéros de $P' - \lambda P$ qu'on note $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$.

  Donc $P' - \lambda P$ admet $r - 1$ zéros autres que les x_i qui sont donc des zéros du polynôme S dans l'écriture (1). Or $\deg(S) = r$, et si on écrit $S = (X - y_1) \ldots (X - y_{r-1}) S_r$ on sait que $\deg(S_r) = 1$ donc $S_r = \nu(X - y_r)$ où y_r est encore un zéro de S et $\nu \in \mathbb{K}$.

Ainsi S est scindé et par (1) on conclut que $P' - \lambda P$ est scindé.

d) En fait $R = Q(D)(P)$ où $D \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ est l'opérateur de dérivation et $Q(D) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ encore.

Or comme Q est scindé dans $\mathbb{R}$, il s'écrit $Q(X) = a_n(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n)$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels.

Alors $Q(D) = a_n(D - \alpha_1 \,\mathrm{id}) \circ \cdots \circ (D - \alpha_n \,\mathrm{id})$.

Alors $Q(D)(P) = [a_n(D-\alpha_1\,\mathrm{id}) \circ \cdots \circ (D-\alpha_{n-1}\,\mathrm{id})]\,((D-\alpha_n\,\mathrm{id})(P)) \quad (*)$.

Or au c), on a montré que P scindé entraîne que $(D-\alpha_n\,\mathrm{id})(P)$ est scindé, alors par récurrence immédiate avec la formule $(*)$, on a la conclusion.

5) a) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Remarquons d'abord que pour tout $f \in E$, $g = e^{\mu\square}f \Leftrightarrow f = e^{-\mu\square}g$ donc que $m_\mu^{-1} = m_{-\mu}$.

Ainsi, par déf. de la composition $m_\mu^{-1} \circ D \circ m_\mu(f) = e^{-\mu\square}.(e^{\mu\square}f)'$.

Par formule sur la dérivée d'un produit, on obtient :

$$\begin{aligned} m_\mu^{-1} \circ D \circ m_\mu(f) &= e^{-\mu f}.(e^{\mu\square}f' + \mu e^{\mu\square}f), \\ &= f' + \mu f, \\ &= (D+\mu\,\mathrm{id})(f). \end{aligned}$$

D'où l'égalité d'opérateurs : $(D+\mu\,\mathrm{id}) = m_\mu^{-1} \circ D \circ m_\mu$.

b) En remplaçant μ par $-\mu$ l'égalité du a) devient :

$$D - \mu\,\mathrm{id} = m_{-\mu}^{-1} \circ D \circ m_{-\mu} = m_\mu \circ D \circ m_{-\mu}.$$

Par récurrence immédiate l'égalité du a) donne aussi que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$(D-\mu\,\mathrm{id})^r = m_\mu \circ D^r \circ m_{-\mu},$$

où les puissances s'entendent pour la composition. Donc :

$$\begin{aligned} f \in \ker(D+\mu\,\mathrm{id})^r &\Leftrightarrow m_\mu(D^r(e^{-\mu\square}f)) = 0, \\ &\Leftrightarrow D^r(e^{-\mu\ \square}f) = 0, \quad \text{car } m_\mu \text{ est bien sûr bijective.} \\ &\Leftrightarrow e^{-\mu\square}f \in \ker(D^r), \\ &\Leftrightarrow e^{-\mu\square}f \in \mathbb{K}_{r-1}[x], \\ &\Leftrightarrow f \in e^{\mu\square}\mathbb{K}_{r-1}[x]. \end{aligned}$$

c) Pour $r = 2$, ce théorème est une belle application du théorème de Bézout pour les polynômes.

Par récurrence, supposons le résultat donné dans l'énoncé vrai pour $r-1 \geq 2$ polynômes et considérons $P_1, \ldots P_r$ comme dans l'énoncé. Notons $Q = \prod_{i=1}^{r-1} P_i$.

Par l'hypothèse que $P_1, \ldots, P_r$ sont *deux à deux* premiers entre eux, on en déduit que $Q \wedge P_r = 1$.

On peut alors appliquer le cas $r = 2$ qui nous dit que $\ker P(L) = \ker Q(L) \oplus \ker P_r(L)$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à Q, on a $\ker Q(L) = \oplus_{i=1}^{r-1} \ker P_i(L)$ ce qui dans l'égalité précédente donne la conclusion.

La récurrence est établie.

d) Avec les notations de l'énoncé $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{d}(X-\alpha_k)^{m_k}$ et le théorème de décomposition des noyaux du c) donne que :

$$\ker P(D) = \bigoplus_{k=1}^{d} \ker(D-\alpha_k\,\mathrm{id})^{m_k}.$$

Par le b), on en déduit que :

$$\ker P(D) = \bigoplus_{k=1}^{d} e^{\alpha_k\square}\mathbb{R}_{m_k-1}[x].$$

Comme $S = \ker P(D)$, l'égalité $S = \bigoplus_{k=1}^{d} e^{\alpha_k\square}\mathbb{R}_{m_k-1}[x]$ dit exactement les éléments de S sont les fonctions de la forme $y(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} q_k(t)e^{\alpha_k t}$ où q_k est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $m_k - 1$.

e) (i) Soit $ay'' + by' + cy = 0$ une E.D.L avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, et $a \neq 0$. L'ensemble S des solutions est $\ker(P(D))$ où $P(X) = aX^2 + bX + c$. Dans le cas $\Delta(P) \neq 0$, $P = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Le théorème précédent donne alors immédiatement que $S = \ker(D - \alpha_1 \,\mathrm{id}) \oplus \ker(D - \alpha_2 \,\mathrm{id}) = \mathbb{C}e^{\alpha_1 \Box} \oplus \mathbb{C}e^{\alpha_2 \Box}$, ce qui est exactement le théorème longuement démontré au chapitre B4.

e) (ii) Pour l'équation de l'énoncé, le polynôme caractéristique P est défini par $P(r) = r^3 - 7r^2 + 11r - 5$.

Ce polynôme admet $r = 1$ comme racine évidente. Par factorisation, on en déduit $P(r) = (r-1)(r^2 - 6r + 5)$ puis par calcul des racines du polynôme du second degré :

$$P(r) = (r-1)^2(r-5).$$

Le théorème donné au c) dit alors que $y \in \mathcal{S}$ si, et seulement si, $y(x) = q_1(x)e^x + q_2(x)e^{5x}$ où $\deg(q_1) \le 1$ et $\deg(q_2) \le 0$.

Ainsi $\boxed{y \in \mathcal{S} \iff \exists\,(a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = (ax+b)e^x + c\,e^{5x}.}$

6.1. a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\lambda + \int_0^x e^{\alpha t}\varphi(t)dt)e^{-\alpha x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé.

b) Dans l'écriture du a), le terme en $\lambda e^{-\alpha x}$ tend vers zéro, on s'occupe donc seulement du second $g(x) = (\int_0^x e^{\alpha t}\varphi(t)dt)e^{-\alpha x}$.

(M1) Méthode Cesaro :*soit $\varepsilon > 0$ et on coupe en deux*

Soit $\varepsilon > 0$. On a un x_0 tel que pour tout $t \ge x_0$, $|\varphi(t)| \le \varepsilon' =$

Alors $|\int_0^x \varphi(t)e^{\alpha t}dt| \le \int_0^{x_0} |\varphi(t)|e^{\alpha t}dt + \int_{x_0}^x \varepsilon' e^{\alpha t}dt$

Le premier terme $A = \int_0^{x_0} |\varphi(t)|e^{\alpha t}dt$ est indépendant de x.

Donc $|g(x)| \le Ae^{-\alpha x} + \varepsilon'(\int_{x_0}^x e^{\alpha t}dt)e^{-\alpha x}$ (1).

Le premier terme $Ae^{-\alpha x}$ avec A indép. de x, tend vers 0 donc on peut le majorer par $\varepsilon/2$ pour $x \ge x_1 \ge x_0$.

Le second terme demande un peu de soin : on peut bien sûr calculer $\int_{x_0}^x e^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}\,(e^{\alpha x} - e^{\alpha x_0}) \le \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ puisque l'exp. est positive.

On peut alors majorer $(\int_{x_0}^x e^{\alpha t}dt)e^{-\alpha x} \le \frac{1}{\alpha}$ ce qui dans (1) donne :

$$\forall\, x \ge x_1,\ \ |g(x)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon'/\alpha.$$

Ainsi avec $\varepsilon' = \varepsilon\alpha/2$ on a la conclusion.

(M2) Avec le théorème d'intégration des relations de comparaisons (5/2 chap. I1)

Par hypothèse $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1)$ donc $\varphi(t)e^{\alpha t} = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{\alpha t})$.

Comme $t \mapsto e^{\alpha t}$ est de signe constant, d'intégrale divergente en $+\infty$, par théorème d'intégration des $o()$ appliqué aux intégrales partielles, on a :

$$\int_0^x \varphi(t)e^{\alpha t}dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_0^x e^{\alpha t}dt\right) = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\alpha x})$$

la dernière égalité étant obtenue par calcul de l'intégrale.

Mais en multipliant cette égalité par $e^{-\alpha x}$, on obtient :

$$e^{-\alpha x}\int_0^x \varphi(t)e^{\alpha t}dt = \underset{x\to+\infty}{o}(1)$$

ce qui est exactement ce qu'on voulait montrer.

c) On pose $\varphi(x) = f'(x) + f(x) = l + \psi(x)$ où $\psi(x) \to 0$. La formule du a) donne $f(x) = (\lambda + \int_0^x e^{\alpha t}(l + \psi(t)))dt)e^{-\alpha x}$.

Donc $f(x) = e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}l dt + (\lambda + \int_0^x e^{\alpha t}\psi(t)dt)e^{-\alpha x}$. On a vu au b) que le second terme tend vers zéro.

Le premier vaut $\frac{l}{\alpha}e^{-\alpha x}(e^{\alpha x} - 1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{l}{\alpha}$.

Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l/\alpha$.

N.B. utile pour le 6.2. Ce qui précède se généralise, avec la même preuve (pour la (M2) avec la module), au cas où α est un nombre complexe de partie réelle strictement positive.

6.2. On pose $Q(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$ comme dans l'énoncé. Alors en notant :

$$g = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f$$

on sait que $g = Q(D)(f)$ où D est l'opérateur de dérivation.

Suivant le principe du calcul itératif de ces $Q(D)(f)$ comme vu au 2), si on note $Q(X) = (X + \mu_1)\dots(X + \mu_n)$ l'écriture scindée de Q dans $\mathbb{C}[X]$ avec les $\mu_k \in \mathbb{C}$, on sait que si on pose $f_0 = f$, $f_1 = f_0' + \mu_1 f_0$, et à chaque étape $f_k = f_{k-1} + \mu_k f_k$ jusqu'à $f_n = f_{n-1}' + \mu_n f_n$. on obtient $g = f_n$

On a donc $f_{n-1}' + \mu_n f_{n-1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.. Par la question 6.1 (cf. le N.B. à la fin de la question précédente) on a alors $f_{n-1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell/\mu_n$ et $f_{n-1}' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. On réapplique le 6.1. pour obtenir que $f_{n-2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell/(\mu_n \mu_{n-1})$. Par récurrence facile, on obtient que $f_0 = f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell/(\mu_n \dots \mu_1) = \ell/a_n$.