Souvenirs du DM 1 :

Fractions continues :

Si $P_{-1} = 1,\ Q_{-1} = 0,\ P_0 = a_0,\ Q_0 = 1$

et $\forall\, n \geq 1,\quad \begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}. \end{cases}$

alors :

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}} = \frac{P_n}{Q_n}$$

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cdots \cfrac{n}{n + \cdots}}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}}} \qquad \text{(Brouncker, 1655)}$$

La plus belle formule pour e (hors D.M.) : $e - 1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$ (Euler 1737, à 20 ans).

Fonctions de Bessel :

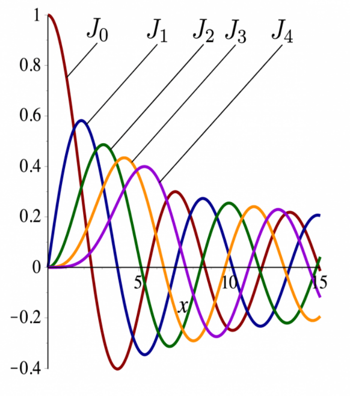
$$\boxed{J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}$$

$$\begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \qquad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } \nu > 0$$

Culturel : ce développement de tangente en fraction continue a permis à Lambert de donner la première démonstration **d'irrationnalité de** π en 1761 (Bessel n'était pourtant pas né !).



Les fonctions de Bessel en physique : solutions d'équations en coordonnées cylindriques ou sphériques :

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0$$