Banque CCINP : Ex 1, 5, 6,7, 8. 1), 43, 46.

Terme général de signe constant

Exercice 1. Etudier, suivant la nature du réel $a > 0$, la convergence des séries de termes généraux a^n, a^{n^2}, $a^{\sqrt{n}}$, $a^{\ln(n)}$.

Exercice 2. Nature des séries de t.g. $u_n = \cos^n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{e}}$, $v_n = (\frac{\pi}{2})^\alpha - (\mathrm{Arctan}(n))^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. et $w_n = \left(\arccos(1 - \frac{1}{n})\right)^\alpha$.

Exercice 3 (Classique incontournable : séries de Bertrand)**.** a) Banque CCINP : nature de $\sum \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$. On pourra séparer le cas $\beta \leq 0$ et le cas $\beta \geq 0$.

b) A l'aide du a) déterminer la nature de toutes les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ pour tous les $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Terme général de signe variable

Exercice 4. Nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$. b) $u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha}{n})$, c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Nature de $\sum \cos\left(n^2 \pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 6. Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$. La série $\sum u_n$ est-elle ACV, CV ?

Exercice 7 (Technique différente : regroupement des termes)**.** [IMT 2022] Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Nature de la série $\sum u_n$?
Indication – On pourra sommer par paquets.

Révisions sur les suites, interaction avec les séries

Exercice 8 (Exemple de suite définie implicitement)**.** Soit $n \geq 1$, et $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$.

On fixe un $\lambda > 0$.

a) Montrer que l'équation $f_n(x) = \lambda$ admet, dans l'intervalle $]n, +\infty[$ une unique solution x_n.
b) Que dire de la limite de (x_n) quand $n \to +\infty$?
c) Etudier la monotonie de la suite (x_n).
d) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n > n + 1$.
e) Démontrer que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\int_{x_n-k}^{x_n-k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{x_n - k} \leq \int_{x_n-k-1}^{x_n-k} \frac{dt}{t}$.
f) En déduire que $\int_{x_n-n}^{x_n+1} \frac{dt}{t} \leq \lambda \leq \int_{x_n-n-1}^{x_n} \frac{dt}{t}$.
g) En déduire un équivalent de (x_n) quand $n \to +\infty$.

Exercice 9 (suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ cas des points fixes indéterminés $|f'(\ell)| = 1$: méthode $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$)**.** Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $f : V \to \mathbb{R}^+$ continue admettant un développement limité de la forme : $f(x) = x - ax^\lambda + x^\lambda \varepsilon(x)$ avec $a > 0, \lambda > 1$ et $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

On considère la suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, quitte à restreindre V, on peut supposer que $\forall\, x \in V \setminus \{0\}$, $f(x) < x$.
b) En considérant V avec la prop. supplémentaire du a), soit une suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \to 0$.
c) Chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle pour $n \to \infty$.
d) En déduire un équivalent de (u_n) quand $n \to \infty$.
e) Appliquer ce qui précède à (u_n) et (v_n) définies par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$.
f) A titre de comparaison, étudier la suite (w_n) définie par $w_0 \in]0, +\infty[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \mathrm{sh}(w_n)$.

Exercice 10 (Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, le cas décroissant.. une alternative à l'étude de la monotonie..). Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un $v_0 \in \mathbb{R}$ et de la relation de récurrence $v_{n+1} = \cos(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) converge. On note ℓ sa limite.

b) Etudier la nature de $\sum(v_n - \ell)$.

Compléments sur d'Alembert

Exercice 11. a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Montrer que $u_n = O(v_n)$.

b) A l'aide de ce résultat, retrouver le lemme de d'Alembert qui dit que si (u_n) est une suite de réels strictement positifs, telle que $u_{n+1}/u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l < 1$ alors pour tout $\lambda \in]l, 1[$, $u_n = O(\lambda^n)$.

Exercice 12 (Amélioration de d'Alembert : avec le lien suite/série, critère de Raabe-Duhamel).

a) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O(\dfrac{1}{n^\beta})$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

Le but de cet exercice est de déduire de ce D.A. un équivalent de u_n de la forme $u_n \sim \dfrac{l}{n^\alpha}$, ce qui donne aussi en particulier la nature de $\sum u_n$. La technique mise en oeuvre est très générale : on va se ramener à une série.

On considère $v_n = n^\alpha u_n$. Pour montrer que (v_n) converge vers une limite finie non nulle, montrer que $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge et conclure.

N.B. Dans quel exemple du cours a-t-on mis en oeuvre la même technique?

b) Application : soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déduire du résultat du a) un équivalent de $|\binom{\alpha}{n}|$ quand $n \to +\infty$ de la forme $\dfrac{c}{n^\beta}$ avec c non précisé, mais β explicite.

Calculs de sommes de séries :

Exercice 13. a) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 14. Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Exercice 15. En justifiant l'existence de cette somme, calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 16. Soit $u_k = \dfrac{\sin(\frac{1}{k(k+1)})}{\cos(\frac{1}{k}).\cos(\frac{1}{k+1})}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 17 (Utilisation du D.A. de H_n). Soit pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 18 (Centrale 2 MP 2022). Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note u_n le nombre de 1 dans l'écriture de n en base 2 . Par exemple $25 = \overline{11001}^2$, donc $u_{25} = 3$.

a) i) Calculer u_{13}, u_{31} et u_{32}

ii) Écrire un programme PYTHON qui calcule u_n.

iii) Afficher un graphe représentant les cent premières sommes partielles de $\sum \frac{u_n}{n(n+1)}$. Formuler une conjecture.

b) i) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \leq 1 + \log_2(n)$.

ii) Déterminer la nature de $\sum_n \frac{u_n}{n(n+1)}$.

c) i) Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de u_n.

ii) Montrer que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n(n+1)}$ vérifie $S = \frac{S}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

iii) Montrer que $S = 2\ln 2$.

Suites doubles (familles sommables)

Exercice 19. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p!q!(p+q+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 20. CNS sur α pour que : $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

Exercice 21 (Décomposition en morceaux suivant la parité)**.** Démontrer que la famille $(x_{m,n})$ indexée par $(\mathbb{N}^*)^2$ et définie par :

$$\forall\ (m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ x_{m,n}=\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}$$

est sommable et calculer sa somme, sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Le coin des séries semi-convergentes

Exercice 22 (La non transmission de la CV par équivalence des T.G.)**.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. a) Montrer que $\sum u_n$ est convergente.

b) Etudier la nature de $\sum|u_n|$.

c) On pose $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$. Justifier que $u_n\sim v_n$.

d) Etudier la nature de $\sum v_n$.

Exercice 23 (Les formules célèbres via ITL et alternative $1/k=\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt.$)**.**

a) Démontrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagange que la série harmonique alternée $\sum(-1)^{n-1}/n$ converge vers $\ln(2)$.

b) En remplaçant pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, $1/k$ par $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$, donne une expression de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ à l'aide d'une intégrale, qu'on écrira ensuite $\ln(2)-R_n$ où R_n est très explicite. Conclure.

c) En utilisant au choix (choisissez bien) la méthode du a) ou du b), démontrer la formule dont Leibniz était si fier cf. intro du chap S1 ;

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^k}{2k+1}+\cdots$$

Exercice 24 (La convergence non commutative)**.** On réordonne les termes de la série harmonique alternée en considérant les sommes partielles suivantes :

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ S_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}$$

où l'on somme à la suite un terme positif puis deux termes négatifs dans l'ordre des termes qui apparaîtraient dans la S.H.A.

a) A l'aide au choix, de sommes télescopiques ou du D.A. de H_n, déterminer la limite de (S_{3n}).

b) On note S_n la somme partielle d'ordre n de la même série qui définit (S_{3n}) autrement dit : $S_1=1$, $S_2=1-\dfrac{1}{2}$, $S_3=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}$, $S_4=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}$ etc.

Déduire du a) que (S_n) converge.

c) Faire le même travail pour S'_{3n} fabriquée en sommant deux termes positifs puis un terme négatif à la suite.... autrement dit

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ S'_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\text{à vous d'écrire la fin, avec } 3n \text{ terme}$$

Exercice 25 (Séries semi-convergentes dont on montre la CV grâce à une IPP discrète, comparer au I1)**.** On considère une suite $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et une suite complexe $(v_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k.v_k$ et $V_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}v_k$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}u_kv_k=\sum_{k=0}^{n-1}(u_k-u_{k+1})V_k+u_nV_n$$

(formule d'I.P.P. discrète, appelée transformation d'Abel : pourquoi parle-t-on d'I.P.P. discrète ?)

Indication – Pour aller de gauche à droite, on pourra remarquer qu'en posant $V_{-1} = 0$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = V_k - V_{k-1}$.

b) En déduire le théorème d'Abel (H.P.) suivant : si (V_n) est bornée, et la suite (u_n) est décroissante, tendant vers 0, alors $\sum u_k v_k$ converge.

c) A l'aide du b) démontrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum \dfrac{\sin(kx)}{k}$ et $\sum \dfrac{\cos(kx)}{k}$ convergent ou encore pour que pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ $\sum \dfrac{z^n}{n}$ converge.

Quel résultat retrouve-t-on si $z = -1$?

Lien avec la physique : les fonctions $f : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(k\omega t)}{k}$ et $g : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(k\omega t)}{k}$ sont écrites sous forme des *développements en série trigonométrique*.

On peut montrer que $f(t) = \dfrac{\pi - \omega t}{2}$ et $g(t) = -\ln(2\sin(\omega t/2))$ et que les séries précédentes sont les *développement de Fourier* de f et g.