Banque CCINP : Ex 59 sauf le 3), 60, 62 (sauf 2.a), 64, 65 (sauf le 3), 71

E.v. familles libres, génératrices, bases, supplémentaires, dimension

Exercice 1. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ dont les restrictions à $[-1,0]$ et $[0,1]$ sont affines.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v. et en donner une base.

Exercice 2. Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré d. Montrer (sans « calcul ») que la suite $(u_n) = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre au plus $d+1$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la famille des fonctions $f_k : x \mapsto \sin(x^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ est *libre* dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Montrer le même résultat pour la famille des fonctions $g_k : x \mapsto \cos(x^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Le lemme d'évitement des s.e.v. stricts)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n quelconque, $F_1,\dots,F_r$ des s.e.v. stricts de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \notin \bigcup_{i=1}^r F_i$.

Pour cela, on raisonne *par l'absurde* en supposant que $E = \bigcup_{i=1}^r F_i$.

On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, note x_λ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

a) Montrer qu'alors il existe un sous-espace F_{i_0} qui contient n vecteurs $x_{\lambda_1},\dots,x_{\lambda_n}$ pour n valeurs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ distinctes dans $\mathbb{R}$.

b) Conclure à la *contradiction*

Exercice 5 (Existence d'un supplémentaire commun à une famille de s.e.v.)**.** Soient $F_1, F_2,\dots,F_k$ des s.e.v. qui sont tous de même dimension, dans un e.v. E de dim. finie, sur un corps K infini.

On considère $\mathcal{G}$ l'ensemble des s.e.v. G de E tels que $G \cap F_i = \{0\}$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

Soit $G_0 \in \mathcal{G}$ de dimension maximale. Montrer que G_0 est un supplémentaire de chacun de s.e.v. F_i dans E.

Exercice 6 (Codimension)**.** Oral Centrale 1, Q1, 2022 : Soit E un K-e.v. de dimension infinie et F un s.e.v. de E tel qu'il existe un supplémentaire G de F de dimension d.

Montrer que pour tout G' s.e.v. de E tel que $F \oplus G = F \oplus G' = E$ on a $\dim G = \dim G'$.

Cette valeur commune de la dimension de tous les supplémentaires de F s'appelle *codimension* de F.

Indication (non donnée à l'oral) : on pourra considérer le projecteur π sur G parallèlement à F.

Exercice 7 (Schémas d'approximation d'une dérivée par une différence finie)**.** Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs des réels a,b,c,d pour que tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{au(x-2h) + bu(x-h) + cu(x+h) + du(x+2h)}{h^3} = u^{(3)}(x) + \underset{h\to 0}{O}(h^2)$$

Applications linéaires

Exercice 8. Soient f_1 et f_2 deux projecteurs d'un e.v. E quelconque, tels que $f_1 \circ f_2 = 0$ et $f_2 \circ f_1 = 0$.

a) Montrer que $f = f_1 + f_2$ est un projecteur.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(f_1+f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \oplus \mathrm{Im}(f_2)$.

c) Montrer que $\ker(f_1+f_2) = \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$

Remarque : toute ceci se généralise avec une somme de davantage de projecteurs...

Exercice 9. Soit E un e.v. de dim. p et F un e.v. de dim. n. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $f \circ g$ soit un projecteur de rang p.

Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

N.B. L'exercice est le plus souvent donné sous la forme matricielle suivante : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ sont telles que AB est la matrice d'un projecteur de rang p (parfois donné très concrètement). Montrer que $BA = I_p$.

(On supposera que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ comme le veut le programme...)

Exercice 10. Soit E de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\ker f$ admet un s.e.v supplémentaire qui est stable par f, alors c'est $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim finie et F et G deux s.e.v. de E. Donner une C.N.S pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) = F$ et $\mathrm{Im}(f) = G$.

Exercice 12.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie.

Montrer $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$ si, et seulement si, $f_{|\mathrm{Im}\, f}$ est un automorphisme.

Exercice 13 (Incontournable : La suite des dimension des images diminue de moins en moins vite)**.** Soit E un K-e.v. de dim. finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

En considérant pour chaque $p \in \mathbb{N}$, $f_{|\mathrm{Im}\, f^p} : \ \mathrm{Im}\, f^p \to \mathrm{Im}\, f^{p+1}$, montrer que la suite des $\dim(\mathrm{Im}\, f^p) - \dim(\mathrm{Im}\, f^{p+1})$ est décroissante.

Calcul matriciel

Exercice 14. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts.

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D.

Exercice 15 (Commutant d'une matrice TS)**.** Soit $T \in TS_n(\mathbb{K})$ et $C = \{M \in TS_n(\mathbb{K}),\ TM = MT\}$. Montrer que $\dim(C) \geq n$.
Indication – Considérer $M \mapsto TM - MT$.

Exercice 16 (Matrice de la multiplication à gauche par A)**.** a) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

Soit $L_A : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$ l'application « multiplication à gauche par A ».

On ordonne la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$ sous la forme $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$.

Expliciter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(L_A)$.

b) Généraliser pour $A \in M_n(\mathbb{K})$. En déduire notamment le $\mathrm{rg}(L_A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 17 (Incontournable H.P. mais à connaître !)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{k \neq i, k=1}^{n} |a_{i,k}|$. Montrer que A est inversible. (On dit que A est à diagonale strictement dominante).
Indication – On pourra raisonner par l'absurde et considérer un $X \in \ker A \setminus \{0\}$.

Exercice 18 (Mines MP 2021 : un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$)**.** Soit $f \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}))$ telle que :

(1) pour toute matrice nilpotente N, $f(N) = 0$,

(2) $\mathrm{Tr}(f(I_2)) = 0$.

Montrer que $f \circ f = 0$. *Indication* – Ecrire f dans une base de $M_2(\mathbb{R})$ dont trois éléments sont des matrices nilpotentes.
Indication – Que dire de la dim. de s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices nilpotentes ? N.B. en généralisant ce résultat dans $M_n(\mathbb{R})$ l'exercice se généralise à $M_n(\mathbb{R})$.

Blocs

Exercice 19 (Opérations par blocs)**.** Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B). \det(A - B)$.

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le déterminant des matrices par blocs suivantes, en fonction de $\det A$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$$

Révisions sur les déterminants

Exercice 21. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer $\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & a^3+c^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 22 (Signature)**.** Au jeu du taquin, on dispose d'un carré de 3×3 cases dont une case est vide. On peut à chaque coup faire pivoter les cases grâce à la case vide. On part de la configuration « bien rangée » à gauche, peut-on arriver à la configuration à droite :

Au départ :	1	2	3	A l'arrivée ?	2	1	■
	4	5	6		8	3	7
	7	8	■		6	4	5

Indication – En donnant le numéro 9 à la case ■, chaque mouvement du jeu est une transposition entre une case et 9. Donc tout mouvement du jeu est une composée de transpositions de la forme $(9i)$.

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de scalaires. On pose $s = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$.

Donner une C.N.S. sur la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour que la famille $(u_i + s)_{1\leq i\leq n}$ soit libre.

Indication – On pourra utiliser le développement du déterminant par multilinéarité.

Exercice 24. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $A = (a^{\max(i,j)})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Calculer $\det(A)$.

Exercice 25. Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\det(A_n)$.

b) Pour quelles valeurs de n la matrice A_n est-elle inversible ?

Exercice 26. Soient $(a,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$. Lorsque $n \geq 2$ calculer le déterminant de taille n suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & \ldots & x \\ y & z & 0 & \ldots & 0 \\ y & 0 & z & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ y & 0 & \ldots & 0 & z \end{vmatrix}$.

Exercice 27. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$D_n = \begin{vmatrix} x & (x-b) & \ldots & (x-b) \\ (x-a) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (x-b) \\ (x-a) & \ldots & (x-a) & x \end{vmatrix}.$$

a) Montrer que $D_n(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1.
b) Calculer $D_n(a)$ et $D_n(b)$, et en déduire le calcul de $D_n(x)$ si $a \neq b$.
c) Quid du cas $a = b$?