MP 2 **Samedi 23 Septembre 2023**

Devoir surveillé 1 : une solution

Exercice : accélération par les développements limites

1) a) On peut écrire $u_n = \exp(n\ln(1+\frac{1}{n}))$. Alors $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et $u_n = \exp(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) = e.\exp(-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) = e(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n}))$.

Ainsi $e - u_n = \frac{e}{2n} + o(\frac{1}{n})$ donc $\boxed{e - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}}$.

b) En écrivant au a) plutôt au départ un D.L. en $O(1/n^3)$: $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})$ le calcul précédent donne que : $u_n = e(1 - \frac{1}{2n}) + O(1/n^2)$.

On cherche α tel que $(1+\frac{\alpha}{n})u_n = e + O(1/n^2)$.

Or

$$\begin{aligned}(1+\frac{\alpha}{n})u_n &= (1+\frac{\alpha}{n})[e(1-\frac{1}{2n}) + O(\frac{1}{n^2})] = e(1+\frac{\alpha}{n})(1-\frac{1}{2n}) + O(\frac{1}{n^2}),\\ &= e(1+\frac{\alpha - 1/2}{n}) + O(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

Il suffit donc (c'est aussi nécessaire) de prendre $\alpha = 1/2$ et donc $\boxed{v_n = u_n(1+\frac{1}{2n})}$.

2) Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange qui s'applique à tout ordre n pour la fonction exponentielle, entre 0 et 1 on a :

$$|\exp(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|1-0|^{n+1}$$

où $M_{n+1} = \sup_{[0,1]}|\exp^{(n+1)}| = \exp(1)$ est indépendant.

Donc $|e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}| = O(1/(n+1)!))$.

3) a) Par déf. de (v_n), on calcule $v_n - \ell = \dfrac{(u_{n+1}-\ell) - \lambda(u_n - \ell)}{1-\lambda}$ (1).

Or par hypothèse sur (u_n) on sait que $u_{n+1} - \ell = \lambda(u_n - \ell) + o(u_n - \ell)$ (2).

Donc avec (1) et (2) on obtient que :

$$v_n - \ell = o(u_n - \ell)$$

Montrer que (v_n) converge plus vite vers ℓ que (u_n) c'est-à-dire que $v_n - \ell = o(u_n - \ell)$.

b) Avec le D.A. $u_n = \ell + \lambda^n + \mu^n + o(\mu^n)$ avec $|\lambda| > |\mu|$, on a :

$$v_n - \ell = \frac{\lambda^{n+1} + \mu^{n+1} + o(\mu^{n+1}) - \lambda^{n+1} - \lambda\mu^n + o(\lambda\mu^n)}{1-\lambda} \quad (1)$$

Or il faut bien comprendre que λ et μ étant fixé, on a l'égalité (d'ensemble de suites négligeables) $o(\mu^{n+1}) = o(\mu^n) = o(\lambda\mu^n)$ puisque pour une suite (a_n) quelconque, on a les équivalences :

$$\frac{a_n}{\mu^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{\mu.\mu^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{\lambda.\mu^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi l'égalité (1) devient :

$$v_n - \ell = \frac{\mu^{n+1} - \lambda\mu^n + o(\mu^n)}{1-\lambda} = \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\mu^n + o(\mu^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\mu^n \quad (2)$$

Avec (2) on obtient immédiatement que $\dfrac{v_{n+1}-\ell}{v_n-\ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$.

Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ a pour coefficient de convergence } \mu}$.

Problème

1) La somme partielle de rang n de la série de terme général $(\Delta(u))_n$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\Delta(u))_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$$

Elle converge donc ssi la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) a) Pour tout entier naturel n, f est de classe C^1 sur $[n, n+1]$ donc en appliquant le théorème des accroissements finis, il existe un réel x de l'intervalle $]n, n+1[$ tel que :

$$f'(x) = \frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} = u_{n+1} - u_n = (\Delta(u))_n.$$

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on considère la propriété suivante :
$\mathcal{P}(p) : \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$, en posant $u_n = f(n), \exists x \in]n, n+p[\ (\Delta^p(u))_n = f^{(p)}(x)$.
Montrons par récurrence sur p que cette propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

• L'initialisation pour $p = 1$ a été faite au a).

• Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$; supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie; soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Définissons $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \geq 0, g(x) = f(x+1) - f(x)$, et la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = g(n)$, i.e. $v_n = (\Delta u)_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\left(\Delta^{p+1} u\right)_n = (\Delta^p v)_n \tag{1}$$

En appliquant $\mathcal{P}(p)$ à la fonction g, on sait qu'il existe $y \in]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p v)_n = g^{(p)}(y)$$

autrement dit, par déf. de g :

$$(\Delta^p v)_n = f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y). \tag{2}$$

Or, on peut réappliquer l'égalité des accroissements finis à $f^{(p)}$ (indéfiniment dérivable), et il existe $x \in]y, y+1[\subset]n, n+p+1[$ tel que :

$$f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y) = f^{(p+1)}(x). \tag{3}$$

En mettant ensemble les équations (1), (2),(3), on a montré que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
La récurrence est établie.

3) a) Par exemple :

```
def Delta(u):
    L=[]
    for i in range(len(u)-1):
        L.append(u[i+1]-u[i])
    return L

def Delta_interee(p,u):
    L=list(u)
    for _ in range(p):
        L=list(Delta(L))
    return L[0]
```

b) Par déf. pour toute suite u et tout t $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = (Tu)_n - (\mathrm{id}\, u)_n$. D'où l'égalité d'opérateurs :

$$\Delta = T - \mathrm{id}\,.$$

c) Comme T et id commutent, par la formule du binôme dans l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$, on sait que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^p = (T - \mathrm{id})^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} T^k$$

Cette égalité d'opérateurs, appliquée à une suite $u \in E$ donne exactement la formule de l'énoncé :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\Delta^p(u))_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$$

4) On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

i) Une récurrence simple montre que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$.

ii) En appliquant le 2) b), il vient :

$$\forall p \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in]n, n+p[, (\Delta^p u)_n = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}.$$

Ceci montre bien que pour tout $p \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^p (\Delta^p u)_n > 0$. La propriété est aussi immédiate si $p = 0$.
Donc u est bien C.M.

5) Avec le 3)b) :

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p \left(\Delta^p b\right)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} b^{n+k} = b^n (1-b)^p$$

(en réappliquant le binôme de Newton au développement de $(1-b)^p$).
Comme $b \in]0,1[$, il s'ensuit que (b_n) est complètement monotone.

6) a) Avec la formule du 3) c) :

$$\begin{aligned}
(\Delta^p(u))_n &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \int_0^1 t^{n+k} \omega(t) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} t^{n+k} \omega(t) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} t^k \right) t^n \omega(t) dt \\
&= \int_0^1 (t-1)^p t^n \omega(t) dt
\end{aligned}$$

Donc :

$$(-1)^p \left(\Delta^p(u)\right)_n = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t) dt$$

b) Comme $t \mapsto \omega(t)(1-T)^p t^n$ est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas la fonction nulle sur $[0,1]$ (cf. l'hyp. de l'énoncé sur ω) on conclut bien (par théorème sur les intégrales) que $\left(\Delta^p(u)\right)_n (-1)^p > 0$ pour tout n et p.
Donc u est C.M.

Culture : on pourrait se demander pourquoi ces questions sur la complète monotonie, car cette notion n'apparaît plus dans la suite du problème. La raison profonde est un théorème de Hausdorff qui dit qu'une suite (u_n) peut s'écrire sous la forme $a_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$ où μ est une *mesure* sur $[0,1]$ si, et seulement si, (a_n) est C.M. Ici les $\omega(t)dt$ sont des mesures particulières (dites absolument continues par rapport à la mesure usuelle dt).

7) a) Pour tout naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k = \int_0^1 \omega(t)\sum_{k=0}^{n}(-t)^k dt = \int_0^1 \omega(t)\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\omega(t)}{1+t}}_{=:R_n} \quad (4)$$

Or

$$|R_n| \leq \int_0^1 Mt^{n+1}dt = \frac{M}{n+2} \quad (5)$$

où on a posé $M = \max_{t\in[0,1]}|(-1)^{n+1}\omega(t)/(1+t)| = \max_{t\in[0,1]}\omega(t)/(1+t)$ qui ne dépend pas de n.

Avec (5) on sait que $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui dans (4) montre que $(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k)$ converge et aussi que ;

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}dt$$

Remarque : on aurait pu aussi justifier la convergence de la série avec le théorème spécial pour certaines séries alternées, mais on n'aurait pas eu la valeur de la somme. L'argument précédent donne les deux résultats.

b) Il est plus facile de démontrer cette égalité en allant de droite à gauche.

Pour tout $t \in [0,1]$, puisque $0 \leq \frac{1-t}{2} \leq \frac{1}{2}$, on peut utiliser la formule des sommes géométriques :

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{1-t}{2}\right)} = \frac{1}{1+t}$$

donc en multipliant par $\omega(t)$ et en intégrant :

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)dt$$

Remarque : les 5/2 peuvent mieux comprendre comment on va de gauche à droite ; il s'agit de développer $\dfrac{1}{1+t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{1-t}{2}\right)}$ en série entière.

c) Définissons donc, pour $p \in \mathbb{N}$: $f_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0,1], f_p(t) = \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t).$$

Chaque f_p est continue sur $[0,1]$, et on a de plus, en posant : $M := \sup_{[0,1]}\omega$,

$$\forall t \in [0,1], |f_p(t)| \leq \frac{M}{2^p}.$$

Ainsi, la série de fonctions continues $\sum f_p$ converge normalement sur $[0,1]$ en particulier uniformément. Par théorème d'intégration terme et à terme des limites uniformes sur un *segment*, on obtient bien :

$$x\int_0^1 \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t)dt = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 f_p(t)dt.$$

Remarque : j'ai suivi le sujet original du concours, mais en fait on pourrait appliquer la même méthode au c) qu'au a) donc prouver le résultat à la main sans utiliser de théorème d'intégration terme à terme.

d) En mettant à la suite des résultats du a), b), c), on a donc montré que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k &\overset{a)}{=} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}dt \overset{b)}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)dt \\ &\overset{c)}{=} \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)dt = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\int_0^1 (1-t)^p\omega(t)dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Or par la question 6) a) pour $n=0$, on a :

$$(-1)^p\left(\Delta^p(u)\right)_0 = \int_0^1 (1-t)^p\omega(t)dt \tag{7}$$

En mettant ensemble les équations (6) et (7), on obtient comme demandé :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}(-1)^p\left(\Delta^p(u)\right)_0$$

8) a) On prend bien sûr pour ω la fonction constante égale à 1.
Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et le 7)a) donne que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$

D'autre part avec l'égalité (6) démontrée à la question 7) d) précédente, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\int_0^1 (1-t)^p \underbrace{\omega(t)}_{=1} dt. = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}$$

b) (i) Soit $n\in\mathbb{N}$ un entier pair qu'on note $n=2p$.
Soit $q>p$. Alors $R_n = \lim\limits_{q\to+\infty}\sum_{k=2p}^{2q-1}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$.
Or pour tout $q>p$,

$$\sum_{k=2p}^{2q-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \left(\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{2p+3}-\frac{1}{2p+4}\right)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2q-2}-\frac{1}{2q-1}\right)}_{\geq 0}$$

donc par passage à la limite pour $q\to+\infty$, on a bien :

$$R_{2p} \geq \left(\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+2}\right)$$

(ii) Même chose pour $n=2p+1$ en considérant $-R_n$.
c) La minoration du b) dit que $\dfrac{1}{n^2} = O(R_n)$ et que (R_n) converge *lentement* vers 0 (en $O(1/n)$ par T.S.A. mais pas mieux que $O(1/n^2)$ en tous cas).
Or si on note $R'_n = \sum_{p=n}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{p+1}(p+1)}$, on a $0\leq R'_n \leq \sum_{p=n}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{p+1}} = \dfrac{1}{2^p}$ donc (R'_n) converge vers 0 à vitesse « géométrique », beaucoup plus rapide.

Transformation d'Euler

N.B. L'idée très simple cachée derrière ces formules compliquées à première vue :

L'idée de base d'Euler est que la somme d'une série alternée convergente :

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \cdots$$

peut se réécrire

$$S = \frac{u_0}{2} + \left(\frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{2}\right) - \left(\frac{u_1}{2} - \frac{u_2}{2}\right) + \left(\frac{u_2}{2} - \frac{u_3}{2}\right) - \left(\frac{u_3}{2} - \frac{u_4}{2}\right) + \left(\frac{u_4}{2} - \frac{u_5}{2}\right) - \cdots$$

L'ordre des additions n'a pas changé et donc la valeur de la somme non plus. Comme les termes $u_n/2 - u_{n+1}/2 = (u_n - u_{n+1})/2$ peuvent décroître plus vite vers 0 que les termes u_n originaux, en appliquant cette transformation plusieurs fois de suite, on doit pouvoir accélérer la convergence.

9) a) La série $\sum(-1)^n u_n$ converge, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+k} = 0$.
Or, p étant fixé, le 3) c) fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

Comme p est indépendant de n, le nombre de terme de cette somme est fixé et chaque terme tend vers 0, donc par addition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0$$

b) **Remarque :** le résultat qu'on veut démontrer est un théorème de Cesaro pour les moyennes *pondérées*. La somme des poids $\binom{n}{k}$ faisant bien 2^n. La démonstration est essentiellement la même.
La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc est bornée : notons $R = \sup_{n\in\mathbb{N}} |r_n|$.
Soit $\varepsilon > 0$:
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, on a un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, |r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tout $p \geq N_1$,

$$\left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k\right| \leq \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}|r_k| \leq \frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{p}{k} + \frac{1}{2^p}\sum_{k=N_1}^{p}\binom{p}{k}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{p}{k} + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8)$$

la dernière inégalité venant de : $\frac{1}{2^p}\sum_{k=N_1}^{p}\binom{p}{k} \leq \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 1$.
Or, pour chaque k, la fonction $p \mapsto \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$ est polynomiale en la variable p.
L'entier N_1 étant fixé, la fonction $p \mapsto \sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{p}{k}$ est donc aussi polynomiale en p donc par croissance comparée :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{p}{k} = 0.$$

Ainsi, **on a un $N_2 \in \mathbb{N}_{\geq N_1}$ tel que :**

$$\forall\, p \geq N_2, \left|\frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\binom{p}{k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

Finalement, avec (8) et (9), on conclut que :

$$\forall\, p \geq N_2, \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k\right| \leq \varepsilon$$

On a bien prouvé, par définition, que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k = 0$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé dans toute cette question. Soit $P \in \mathbb{N}$; notons

$$\begin{aligned} S_P &:= \sum_{p=0}^{P}\left[\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right] = \frac{(-1)^0}{2^0}\left(\Delta^0 u\right)_n - \frac{(-1)^{P+1}}{2^{P+1}}\left(\Delta^{P+1}u\right)_n \\ &= u_n - \frac{(-1)^{P+1}}{2^{P+1}}\left(\Delta^{P+1}u\right)_n . \end{aligned} \tag{10}$$

d'après la formule des sommes télescopiques et $\Delta^0 = \mathrm{id}$.
Or d'après le 3) c) ,

$$\frac{(-1)^{P+1}}{2^{P+1}}\left(\Delta^{P+1}u\right)_n = \frac{(-1)^{P+1}}{2^{P+1}}\sum_{k=0}^{P+1}\binom{P+1}{k}(-1)^{P+1-k}u_{n+k} = \frac{1}{2^{P+1}}\sum_{k=0}^{P+1}\binom{P+1}{k}(-1)^k u_{n+k} \tag{11}$$

Comme n est fixé dans toute cette question, posons $a_k = (-1)^k u_{n+k}$. Alors (11) s'écrit ;

$$\frac{(-1)^{P+1}}{2^{P+1}}\left(\Delta^{P+1}u\right)_n = \frac{1}{2^{P+1}}\sum_{k=0}^{P+1}\binom{P+1}{k}(-1)^k a_k \tag{12}$$

Comme on sait que $a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit de la question 9 b) que

$$\frac{1}{2^{P+1}}\sum_{k=0}^{P+1}\binom{P+1}{k}(-1)^k a_k \underset{P\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui dans (12) montre que :

$$\frac{(-1)^{P+1}}{2^{P+1}}\left(\Delta^{P+1}u\right)_n \underset{P\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui dans (10) montre enfin que :

$$S_P \underset{P\to+\infty}{\longrightarrow} u_n$$

autrement dit que :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}\left(\Delta^p(u)\right)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}(u)\right)_n\right) = u_n$$

comme demandé.

10) a) Suivant l'indication :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n &= \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}((\Delta^p u)_{n+1} - (\Delta^p u)_n) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n + \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_n}\, - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_{n+1} \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_{n+1} = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\left((\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. En sommant sur n les égalités précédentes multipliées par $(-1)^n$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right) &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\left((\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}\right) \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left((\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}\right) \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 + (-1)^N(\Delta^p u)_{N+1}, \end{aligned} \tag{13}$$

par télescopage. Or par le 9 a), on sait que $(\Delta^p u)_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut donc passer à la limite pour $N \to +\infty$ dans le membre de droite de l'égalité (13) pour obtenir la convergence et la valeur de la somme demandée.
b) En permutant la somme finie avec la somme infinie (addition des limites) :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{r}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sum_{p=0}^{r}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(u_n-\frac{(-1)^{r+1}}{2^{r+1}}\left(\Delta^{r+1}u\right)_n\right)\end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie par télescopage.
c) Par le calcul du b),

$$E_r=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(u_n-\frac{(-1)^{r+1}}{2^{r+1}}\left(\Delta^{r+1}u\right)_n\right) \tag{14}$$

Comme $\sum(-1)^n u_n$ converge, l'égalité (14) montre que $\sum_n \frac{(-1)^{r+1}}{2^{r+1}}\left(\Delta^{r+1}u\right)_n$ converge aussi et donc on peut séparer les termes dans (14) :

$$E_r=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+r+1}}{2^{r+1}}\left(\Delta^{r+1}u\right)_n$$

et donc

$$E_r-S=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+r+1}}{2^{r+1}}\left(\Delta^{r+1}u\right)_n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+r+1}}{2^{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^{r+1-k}\binom{r+1}{k}u_{n+k}$$

où, pour la dernière égalité, on a utilisé la formule du 3) c) avec $p=r+1$.
En permutant à nouveau les sommations, on obtient

$$\begin{aligned}E_r-S &= \frac{-1}{2^{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+k}\binom{r+1}{k}u_{n+k},\\ &= \frac{-1}{2^{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+k}u_{n+k},\end{aligned}$$

ce qui, en réindexant la dernière somme, donne exactement la formule annoncée :

$$E_r-S=\frac{-1}{2^{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}\sum_{n=k}^{+\infty}(-1)^n u_n,$$

11) Vu la définition de E_r, on veut montrer que $E_r-S \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or en posant encore $R_k=\sum_{n=k}^{+\infty}(-1)^n u_n$, la formule du 10 c) s'écrit :

$$E_r-S=\frac{-1}{2^{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}R_k$$

Et avec le théorème de Cesaro de la question 9 b), comme $R_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que

$$\frac{-1}{2^{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}R_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui donne bien la conclusion.