DM 2 : polynômes d'endomorphismes, calcul itératifs d'opérateurs de dérivations, applications

Pour le lundi 02 octobre 2023

1) Polynôme en un endomorphisme :

Question de cours : Soit E un K-e.v. et $L \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

Démontrer que l'application $e_L : K[X] \to \mathscr{L}(E)$, $P \mapsto P(L)$ est un morphisme de K-algèbres.

2) Application au calcul itératif des dérivées

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et soit $D : E \to E$, $f \mapsto f'$ l'opérateur [1] de *dérivation.*

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels.

Justifier que pour toute fonction $f \in E$ pour calculer $g = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f$ avec $a_n \neq 0$, on peut procéder comme suit :

- on définit le polynôme $Q(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$, de sorte que $g = Q(D)(f)$.
- On considère son écriture scindée dans $\mathbb{C}$, qu'on écrit $Q(X) = (X + \mu_1) \ldots (X + \mu_n)$ avec $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ non nécessairement distincts,
- on pose $f_0 = f$, $f_1 = f_0' + \mu_1 f_0$, et à chaque étape $f_k = f_{k-1}' + \mu_k f_{k-1}$ jusqu'à $f_n = f_{n-1}' + \mu_n f_{n-1}$.

Alors : $g = f_n$ (justifier).

3) Une première application aux zéros

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ayant au moins $(n+1)$ zéros dans I. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que le polynôme $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ a toutes ses racines réelles.

Montrer qu'il existe un $\zeta \in I$ tel que $f^{(n)}(\zeta) + a_1 f^{(n-1)}(\zeta) + \cdots + a_n f(\zeta) = 0$.

Indication – On pourra utiliser la relation suivante, vue pour les E.D. : $f' + \mu f = (f e^{\mu \Box})' e^{-\mu \Box}$.

4) Une application à des familles de polynômes scindés dans $\mathbb{R}[X]$

a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors P' est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ alors P' est aussi scindé dans $\mathbb{R}$.

Indication – Contrairement au a), il ne suffit pas de compter les racines, mais aussi tenir compte des multiplicités. Le a) était de l'analyse, ici l'algèbre intervient.

c) Montrer encore mieux que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $Q = P' - \lambda P$ est aussi scindé dans $\mathbb{R}$.

d) Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tous les deux *scindés dans* $\mathbb{R}[X]$. On écrit $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Montrer que le polynôme R défini par $R = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$ est aussi scindé dans $\mathbb{R}$ où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de P.

5) Un point de vue plus conceptuel sur la solution du 3) et le théorème sur les E.D.L. à coefficients constants de degrés quelconques :

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(I, K)$, pour tout $\mu \in K$, notons $m_\mu : E \to E$, $f \mapsto e^{\mu \Box} f$ l'opérateur de multiplication par la fonction $e^{\mu \Box} : x \mapsto e^{\mu x}$.

a) Justifier qu'on a la relation dans $\mathscr{L}(E)$:

$$\boxed{(D + \mu\,\mathrm{id}) = m_\mu^{-1} \circ D \circ m_\mu.}$$

C'est cette relation de *conjugaison* entre les opérateurs D et $D + \mu\,\mathrm{id}$ qui permet de « transporter » les propriétés de la dérivation à cette opérateur $D + \mu\,\mathrm{id}$ plus compliqué.

b) Déduire du a) que si $\mu \in K$, et $r \in \mathbb{N}^*$, $\ker\left((D - \mu\,\mathrm{id})^r\right) = e^{\mu \Box} K_{r-1}[x]$.

1. Le mot *opérateur* est d'emploi fréquent pour désigner des A.L. surtout dans les espaces de fonctions.

c) Le théorème de décomposition des noyaux suivant sera dans le cours du chapitre R2 :

> Si $P_1,\dots,P_r$ dans $K[X]$ sont *deux à deux premiers entre eux*, et E est un K-e.v. quelconque, et $L\in\mathscr{L}(E)$ alors en notant P le produit $P_1\dots P_r$, on a :
>
> $$\ker(P(L))=\bigoplus_{i=1}^{r}\ker(P_i(L)).$$

Travail à faire : on admet ici la démonstration de ce théorème pour $r=2$ (cf. cours). En déduire la démonstration pour r quelconque.

d) Soit $(\mathcal{E})$: $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$ une E.D. linéaire d'ordre n à coefficients constants $(a_n,\dots,a_0)\in\mathbb{C}^{n+1}$ avec $a_n\neq 0$.
On note $S=\{y\in\mathcal{D}^n(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0\}$ l'ensembles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de $(\mathcal{E})$. On associe à l'E.D. $\mathcal{E}$ le polynôme défini par $P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_1X+a_0$ qu'on appellera ici polynôme caractéristique de $\mathcal{E}$.
En remarquant qu'alors $S=\ker P(D)$, déduire de ce qui précède le :

> **Théorème** – *si on écrit P de manière scindée dans $\mathbb{C}$, $P=\prod_{k=1}^{d}(X-\alpha_k)^{m_k}$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ deux à deux distinctes, alors l'ensemble S de solutions de $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions y de la forme : $y(t)=\sum_{k=1}^{d}q_k(t)e^{\alpha_kt}$ où q_k est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à m_k-1.*

e) Pour bien comprendre ce résultat : (i) traduisez le pour retrouver le théorème de 1ère année sur les solutions complexes de E.D.L. d'ordre 2 à $\Delta\neq 0$ et (ii) décrire l'ensemble des solutions de l'équation $y^{(3)}(x)-7y^{(2)}(x)+11y'(x)-5y(x)=0$.

6) Un problème de limite pour des $P(D)(f)$:

6.1. A l'ordre un :

Soit $\alpha>0$ et soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to+\infty}f'(x)+\alpha f(x)=0\in\mathbb{R}$. On veut montrer qu'alors $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$

a) En posant $\varphi=f'+\alpha f$ exprimer f en fonction de φ via la Méthode de Variation de la Constante et d'une intégrale.

b) Ensuite montrer que le terme intégral tend vers zéro.
Indication – prendre un ε et méthode Cesaro (pour les 5/2 vous avez un théorème ...)

c) Généralisation : on suppose maintenant qu'on a les mêmes hypothèses mais que

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)+\alpha f(x)=\ell\in\mathbb{R}.$$

Que conclure sur $\lim_{x\to+\infty}f(x)$?

6.2. Cas général :

Soit $f\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{K}$ avec $a_n\neq 0$ tels que que

$$f^{(n)}+a_1f^{(n-1)}+\dots+a_nf\underset{+\infty}{\longrightarrow}\ell\in\mathbb{K}.$$

On suppose que toutes les racines complexes de $Q(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\dots+a_n$ sont de partie réelle *strictement négative*. Montrer que $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}\ell/a_n$ et que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $f^{(k)}\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$.

6.3. Excursion sur l'hypothèse du 6.2. :

On peut se demander comment « voir » sur les coefficients d'un polynôme *réel* que celui-ci a toutes ses racines complexes à partie réelle strictement négative.

a) Démontrer qu'une condition nécessaire est que tous les coefficients du polynômes soient *strictement positifs.*

b) Cette condition n'est pas suffisante. On va donner une C.N.S. dans le cas particulier des polynômes à coefficients réels de degré 3.

Soit $P=X^3+aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$.

(i) On écrit $P=(X+\alpha).(X^2+\beta X+\gamma)$ avec α,β,γ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que P a toutes ses racines de partie réelle strictement négative si, et seulement si, $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0$

(ii) En déduire que P a toutes ses racines de partie réelle strictement négative si, et seulement si,

$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ ab-c>0.$$