DM 1 : solutions

Partie I :

1) a) On constate d'abord, par une récurrence évidente, que tous les u_n sont positifs ou nuls. Ensuite

$$\forall\ n \geqslant 1, \quad u_{n+1} - u_n = a_n u_{n-1} \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante partir du rang 1.

b) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + a_n u_{n-1} \leqslant u_n\left(1 + a_n\right), \tag{1}$$

l'inégalité étant donnée par la prop. de croissance du a).
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$ par convexité de l'exponentielle.
Donc

$$u_n\left(1 + a_n\right) \leqslant u_n e^{a_n} \tag{2}$$

car $u_n \geqslant 0$.
Avec (1) et (2) on a bien montré que pour tout $n \geq 2$,

$$u_{n+1} \leqslant u_n e^{a_n}.$$

c) Le b) donne, par récurrence :

$$\forall n \geqslant 3, u_n \leqslant u_2 \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)$$

Si $\sum a_n$ converge, comme les a_n sont positifs, il vient :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n \leqslant u_2 \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right).$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par une constante, donc convergente.

d) On suppose $u_1 > 0$. La croissance de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2},\ 0 \leqslant a_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{u_{n+1} - u_n}{u_1}$$

Si la suite (u_n) est convergente, il en est de même pour la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$. Par comparaison de séries termes positifs, $\sum a_n$ converge.

2) a) On montre par récurrence double la propriété

$$H(n)\ :\ |u_n| \leqslant v_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$ et $n = 1$, il y a égalité par définition donc $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.
- Soit $n \geq 1$ tel que $H(n-1)$ et $H(n)$ soient vraies. Alors

$$|u_{n+1}| = |u_n + a_n u_{n-1}| \leqslant |u_n| + |a_n|\,|u_{n-1}| \leqslant v_n + |a_n|\, v_{n-1} = v_{n+1}.$$

Donc $H(n+1)$ est vraie.
La récurrence est établie.

b) Par définition, $u_{n+1} - u_n = a_n u_{n-1}$ donc

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |a_n|.|u_{n-1}| \tag{3}$$

Comme $\sum |a_n|$ converge, on sait par le 1) c) appliqué à (v_n), que (v_n) converge. En particulier il existe un $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$.
Par l'inégalité du a), on en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M \tag{4}$$

Avec (3) dans (7), on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - u_n| \leq M|a_n| \tag{5}$$

Comme $\sum |a_n|$ converge, par théorème de comparaison pour les S.T.P., on déduit de (5) que $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge.

c) Comme $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge, on sait que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, et par le lien suite/série (sommes télescopiques), la suite (u_n) converge.

3) a) Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$, on sait, par théorème de comparaison pour les S.T.P., comparaison à l'exemple de Riemann, que $\sum a_n$ CV.
Par 1) c), on en déduit que (u_n) converge.
b) Par définition, $u_{n+1} - u_n = a_n u_{n-1}$, et comme $\ell \neq 0$, $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ donc ici :

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n(n+1)} \tag{6}$$

Par le lien suite-série :

$$\ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) \tag{7}$$

et $\frac{\ell}{n(n+1)}$ est de signe constant, donc avec (6) et (7) par le théorème de sommation des relations de comparaison :

$$\ell - u_n \sim \ell \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \ell \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{\ell}{n}.$$

c) On a toujours (7) avec maintenant $u_{n+1} - u_n = a_n u_{n-1} = \mathrm{o}\,(a_n) = o(\dfrac{1}{n(n+1)})$. D'après le théorème de sommation des relations de comparaison, qui s'applique avec $(1/(n(n+1)))$ à termes positifs :

$$\ell - u_n = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}\right)$$

on conclut donc que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n})$$

Partie II :

4) • Initialisation pour $n = 0$: Le fait $P_0 = a_0$ et $Q_0 = 1$ conviennent est évident avec $R_0 = a_0$.
Pour $n = 1$: avec la définition de P_{-1} et Q_{-1} qui sert ce que la formule de récurrence soit valable dès $n = 1$, on a $P_1 = b_1 a_0 + a_1$ et $Q_1 = b_1$ donc $P_1/Q_1 = \dfrac{b_1 a_0 + a_1}{b_1} = a_0 + \dfrac{a_1}{b_1}$ donc $P_1/Q_1 = R_1$.
• Hypothèse de récurrence pour un $n \geq 1$: on suppose que (†) est vraie pour *toute suite* (a_k), (b_k) pour toutes les réduites jusqu'à l'ordre n compris.
On fixe une suite (a_k) et une suite (b_k).
On veut montrer qu'on a la formule (†) pour P_{n+1} et Q_{n+1}.
On peut alors voir R_{n+1} comme une réduite d'ordre n de la fraction où le dernier dénominateur est $b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$.

On a donc $R_{n+1} = \dfrac{P'_n}{Q'_n}$ avec suivant l'H.R. valable pour les réduites d'ordre n (appliquée à cette suite (a_k) et à $(b_1, \dots, b_{n-1}, b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}})$:

$$\begin{cases} P'_n = \big(b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\big)P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q'_n = \big(b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\big)Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}. \end{cases}$$

Cette relation se réécrit :

$$\begin{cases} b_{n+1}P'_n = b_{n+1}(b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + a_{n+1}P_{n-1}, \\ b_{n+1}Q'_n = b_{n+1}(b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) + a_{n+1}Q_{n-1}, \end{cases} \qquad (*)$$

Et par l'H.R. pour la suite (a_k) et (b_k), on sait que les parenthèses $(b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2})$ dans l'expression précédente égalent P_n (resp. $(b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) = Q_n$), ce qui dans $(*)$ donne :

$$\begin{cases} b_{n+1}P'_n = b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1}, \\ b_{n+1}Q'_n = b_{n+1}Q_n + a_{n+1}Q_{n-1}, \end{cases} \qquad (**)$$

donc si on pose $P_{n+1} = b_{n+1}P'_n$ et de même $Q_{n+1} = b_{n+1}Q'_n$, on a bien $R_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ et $(**)$ est exactement la formule (†) à l'ordre $n+1$. □

5) Avec la relation (†) de la question précédente, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n &= (b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2})Q_{n-1} - P_{n-1}(b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}), \\ &= -a_n(P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}), \end{aligned}$$

et donc par récurrence immédiate :

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^n a_n \dots a_1 (P_0 Q_{-1} - P_{-1}Q_0) = (-1)^{n-1} a_n \dots a_1$$

On en déduit alors :

$$R_n - R_{n-1} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n}{Q_n Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}a_1 a_2 \dots a_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

6) Par somme télescopique à partir de la question précédente, $R_n = R_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}a_1 a_2 \dots a_k}{Q_k Q_{k-1}}$, avec $R_0 = a_0$, on a la conclusion.

7) On calcule les dénominateurs Q_n au sens de la question 4), pour la fraction continue définie par :

$$\cfrac{a_0}{b_0 - \cfrac{a_1 b_0}{a_1 + b_1 - \cfrac{a_2 b_1}{a_2 + b_2 - \cfrac{a_3 b_2}{a_3 + b_3 - \dots}}}}$$

Il faut faire attention au changement de notation et comprendre qu'ici $R_n = \alpha_0 + \cfrac{\alpha_1}{\beta_1 + \cfrac{\alpha_2}{\beta_2 + \cfrac{\alpha_3}{\beta_3 + \frac{\alpha_4}{\ddots + \frac{\alpha_n}{\beta_n}}}}}$ avec $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = a_0$, $\beta_1 = b_0$, et pour $n \geq 2$, $\alpha_2 = -a_{n-1}b_{n-2}$ et $\beta_n = a_{n-1} + b_{n-1}$.
On a donc $Q_0 = 1$, et $Q_1 = \beta_1 . Q_0 = b_0$.
Ensuite $Q_2 = (a_1 + b_1)Q_1 - a_1 b_0 Q_0 = (a_1 + b_1)b_0 - a_1 b_0 = b_1 b_0$.
On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $Q_n = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$.

Alors pour tout $n \geq 2$, on a

$$\frac{(-1)^{n-1}\alpha_1 \dots \alpha_n}{Q_n Q_{n-1}} = \frac{a_0 a_1 \dots a_{n-1} b_0 \dots b_{n-2}}{b_0 \dots b_{n-1} b_0 \dots b_{n-2}} = \frac{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}{b_0 \dots b_{n-1}}$$

Vue l'hypothèse faite sur la série de terme général $\dfrac{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}{b_0 \dots b_{n-1}}$, en utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que la fraction continue est convergente de valeur la somme de cette série.

8) On pose $a_0 = 1, a_k = -1$ pour $k \geqslant 1, b_k = k + 2$ alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0 a_1 \dots a_n}{b_0 b_1 \dots b_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$$

Or

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$$

Ainsi, on a bien :

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0 a_1 \dots a_n}{b_0 b_1 \dots b_n}$$

Alors $a_k + b_k = k + 1$ et $-a_k b_{k-1} = k + 1$ La formule donnée en résulte immédiatement avec la question précédente.

9) On pose $a_0 = 1, b_0 = 1$ et pour tout $k \geq 1$, , $a_k = 1 - 2k$, $b_k = 2k + 1$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0 a_1 \dots a_n}{b_0 b_1 \dots b_n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.(-1)(-3)(-5)\dots(1-2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

On applique donc encore le résultat du 7), avec cette fois $a_k + b_k = 2$ et $-a_k b_{k-1} = (2k-1)^2$ et on a la formule demandée appelée *formule de Brouncker*.

10) C'est une application directe de la propriété admise 2 avec $c_n = 1/n$, puisque $\dfrac{1}{|c_n . c_{n+1}|} = O(1/n^2)$ est alors bien un terme général de série convergente.

11) En posant $u_k = \dfrac{1}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$, on a :

$$u_{k+1}/u_k = \frac{1}{(k+1)(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

ainsi $u_{k+1}/u_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et d'après le test de d'Alembert $\sum u_k$ converge.

12) Suivant l'énoncé, on suppose connue l'égalité :

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (*)$$

Par définition,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(\frac{1}{2} + k + 1\right)} \frac{x^{2k}}{4^k}.$$

Or, sachant que pour tout $\nu > 0$, $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$, il est facile de déduire de $(*)$ une valeur explicite des $\Gamma(\nu + k + 1)$. Précisément :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2} + k + 1\right) &= \left(\frac{1}{2} + k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) = \left(\frac{1}{2} + k\right)\left(\frac{1}{2} + k - 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + k - 1\right) = \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2} + k\right)\left(\frac{1}{2} + k - 1\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{k+1}}(2k+1)(2k-1)\dots 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

D'où

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k x^{2k+1}}{k!2^k(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \sin x.$$

Evidemment la démonstration pour $J_{-1/2}(x)$ est analogue.

13) Pour une famille de fonctions dépendant d'un paramètre, on appelle *relation de contiguïté* une égalité entre termes de la famille dont le paramètre diffère de ± 1.

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2/4\right)^n}{n!\Gamma(\nu+n)} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2/4\right)^n}{n!\Gamma(\nu+n+2)}$$
$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2/4\right)^n}{n!\Gamma(\nu+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2/4\right)^{n+1}}{n!\Gamma(\nu+n+2)} \right)$$
$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!\Gamma(\nu+n)} - \frac{1}{(n-1)!\Gamma(\nu+n+1)} \right) \left(\frac{-x^2}{4} \right)^n \right)$$
$$= \frac{2}{x} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \left(\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{-x^2}{4} \right)^n \right) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

La principale propriété utilisée est $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

14) En fait, on veut montrer, pour x fixé et $n \to +\infty$, que $J_{\nu+n}(x)$ est équivalent au premier terme de la somme. On isole donc ce terme dans la somme :

$$J_{\nu+n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n} \frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)} \left(1 + R_n(x)\right) \quad (*)$$

avec

$$R_n(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(-x^2/4\right)^k}{k!(\nu+n+k)(\nu+n+k-1)\dots(\nu+n+1)}$$

Pour n assez grand, $\nu + n > \frac{x^2}{4}$ et $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{4(\nu+n)}\right)^k$. Donc $|R_n(x)| \leqslant \frac{x^2/4(\nu+n)}{1-x^2/4(\nu+n)}$ donc par majoration :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Donc $(*)$ devient :

$$J_{\nu+n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n} \frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)} (1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n} \frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)}.$$

En particulier, $J_{\nu+n}(x) \neq 0$ pour n assez grand.

15) En divisant la relation de contiguïté de la question 13 par $J_\nu(x)$, on obtient :

$$\frac{J_{\nu-1}(x)}{J_\nu(x)} = \frac{2\nu}{x} - \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)}$$

En inversant :

$$\frac{J_\nu(x)}{J_{\nu-1}(x)} = \frac{1}{\frac{2\nu}{x} - \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)}}$$

Posons $\alpha_n(x) = i\frac{J_{\nu+n-1}(x)}{J_{\nu+n-2}(x)}$. Alors la relation précédente donne :

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{\frac{2(\nu+n-1)}{ix} + \alpha_{n+1}(x)}$$

ce qui est bien l'égalité demandée, et par la suite, on notera $c_n(x) = \frac{2(\nu+n-1)}{ix}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui permet d'écrire :

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{c_n(x) + \alpha_{n+1}(x)}$$

16) Par définition, $\alpha_1(x) = i\dfrac{J_\nu(x)}{J_{\nu-1}(x)}$. Vu la relation obtenue à la fin de la question précédente, la propriété admise 3 donnera

$$\alpha_1 = [c_1, c_2, \dots, c_n, \dots] \quad (*)$$

à condition de vérifier les deux hypothèses de cette propriété. Or :

- D'une part, $\dfrac{1}{|c_n.c_{n+1}|} \underset{n\to+\infty}{=} O(\dfrac{1}{n^2})$ est bien un terme général de série convergente
- D'autre part, $\dfrac{\alpha_{n+1}}{c_n} \underset{n\to+\infty}{=} O(\dfrac{J_{\nu+n}(x)}{nJ_{\nu+n-1}(x)})$ et avec l'équivalent trouvé à la question 14), on sait que :

  $$\frac{J_{\nu+n}(x)}{J_{\nu+n-1}(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2}\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu+n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2(\nu+n)}$$

  donc $\dfrac{\alpha_{n+1}}{c_n} \underset{n\to+\infty}{=} O(\dfrac{1}{n^2})$ en particulier $\dfrac{\alpha_{n+1}}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Ainsi les deux hypothèses de la propriété admise 3 sont vérifiées et l'égalité $(*)$ est vraie.
  En remplaçant α_1 et les c_n par leur expression explicite dans $(*)$, on a donc :

$$\begin{aligned} i\frac{J_\nu(x)}{J_{\nu-1}(x)} &= [\frac{2\nu}{ix}, \frac{2(\nu+1)}{ix}, \dots, \frac{2(\nu+n-1)}{ix}, \dots], \\ &= \cfrac{1}{\cfrac{2\nu}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(\nu+1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(\nu+2)}{ix} + \ddots}}} \end{aligned}$$

en multipliant au premier numérateur et dénominateurs par ix, il vient :

$$i\frac{J_\nu(x)}{J_{\nu-1}(x)} = \cfrac{ix}{2\nu + \cfrac{ix}{\cfrac{2(\nu+1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(\nu+2)}{ix} + \ddots}}}$$

En multipliant à chaque numérateur et dénominateur par ix à partir du deuxième terme, on a :

$$i\frac{J_\nu(x)}{J_{\nu-1}(x)} = \frac{ix}{2\nu - \frac{x^2}{2(\nu+1) - \frac{x^2}{2(\nu+2) - \frac{x^2}{\ddots}}}}$$

ce qui est la formule voulue.

17) Avec $\nu = 1/2$, compte tenu de la question 12), on a bien $J_{1/2}(x)/J_{-1/2}(x) = \tan(x)$ et le développement de tangente annoncé.