Exercice 1 (Mines Telecom 2022)**.** On note $E = \mathbf{R}[X]$. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $P \in E$, on note

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n dt.$$

a) Montrer que, pour tout $P \in E, N(P) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |\theta_n(P)|$ est bien défini.
b) Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 2 (CCINP 2022)**.** Soient $(E, \|\|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
b) On suppose qu'il existe $r > 0$ et $x_0 \in E$ tels que $B_0(x_0, r) \subset F$. Montrer que, pour tout $y \in E$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$ tels que $\alpha x_0 + \beta y \in B_0(x_0, r)$. En déduire que $F = E$
c) On suppose ici que $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathcal{N}$ est fermé et d'intérieur vide. Montrer que Vect $\mathcal{N}$ est d'intérieur vide.

Exercice 3 (CCINP 2022)**.** Soit E un espace vectoriel normé.

a) Montrer que E est connexe par arcs.
b) Soit F un autre espace vectoriel normé, et $f : E \to F$ une fonction continue. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs pour tout connexe par arcs A de E.
c) Montrer que $\mathbf{C}^*$ est connexe par arcs. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{R}$.
d) Soit U une partie de E. Montrer que l'indicatrice de U dans E est continue si U est à la fois ouverte et fermée dans E. En déduire les parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Exercice 4 (CCINP 2021)**.** On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

a) Calculer la norme de $P_n = \sqrt{n}(1 - X)^n$.
b) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbf{R}[X], \langle T, P\rangle = P(0)$.

Exercice 5 (CCINP MP 2022 : espaces hermitiens, pour faire peur mais un peu inutile ici !!)**.**

a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E. Montrer que K est fermé et borné.
b) On s'intéresse à l'espace vectoriel $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, muni de la norme $\|.\|_2$, définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$. On admet dans un premier temps que $\|.\|_2$ est une norme sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto e^{inx}$
   i) Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $\|f_n - f_p\|_2 = 2\sqrt{\pi}$.
   ii) En déduire que la boule fermée $\bar{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.
c) i) Démontrer pour tous complexes u et v l'inégalité : $|uv| \leqslant \frac{|u|^2}{2} + \frac{|v|^2}{2}$. En déduire que pour toutes fonctions f et g de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$$

   ii) Soit $(f, g) \in E^2$. En déterminant le minimum de la fonction :

$$h : \lambda \mapsto \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$$

   démontrer que : $\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$.
   iii) En déduire que $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.
d) Question rajoutée par moi : pourquoi le c) n'était pas du tout utile pour montrer que c'est une norme si on connait le résultat en réel ?

Exercice 6 (Mines-Ponts 2022, plutôt « facile »)**.** Soient J un ensemble, E un espace euclidien, $(y_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de E vérifiant :

$$(*) : \exists A, B > 0 / \forall x \in E, A\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle^2 \leqslant B\|x\|^2$$

a) Montrer que $(y_j)_{j\in J}$ est une famille génératrice de E.

b) Montrer que dans le cas $E = \mathbb{R}^2, y_1 = (1,0), y_2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right), y_3 = y_2$ satisfont $(*)$.

c) Montrer que si $A = B = 1$ et $\forall j \in J, \|y_j\| = 1$, alors $(y_j)_{j\in J}$ est une base orthonormée de E.

d) Si $A = B$, montrer que :

$$\forall x \in E, x = \frac{1}{A}\sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle\, y_j$$

Exercice 7 (Mines-Ponts 2022, donné sans prép., normes duales)**.** Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot\rangle$ associé à la norme $\|\cdot\|$. On note N une norme quelconque sur E.

a) Soit $x \in E$ Après avoir justifié l'existence de ces nombres, montrer que

$$\sup_{y\in E\setminus\{0\}} \frac{\langle x, y\rangle}{N(y)} = \sup_{y\in E, N(y)=1} \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}_+$$

On note dorénavant cette quantité $N^*(x)$.

b) Montrer que N^* définit une norme sur E

On l'appelle «norme duale» de N.

c) Donner N^* dans les cas où $N = \|\cdot\|, N = \|\cdot\|_\infty$ et $N = \|\cdot\|_1$. On rappelle que si $\alpha > 0$ alors $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\alpha := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Exercice 8 (Centrale 1 2022, b) bien pour comprendre l'U.C.)**.** Soit $A \subset \mathbf{R}^+$non vide.

a) Montrer que A est compact si et seulement si toute fonction continue de A dans R est bornée.

b) Soit $f : A \to \mathbf{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée sur $A \cap [0, N]$ pour $N \in \mathbf{N}^*$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toute fonction continue de A dans R soit uniformément continue.

Exercice 9 (Centrale 1 2022, grand classique)**.** Soit N l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$. On admet que N est une norme. Soit Γ un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \Gamma$.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{U}$

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)^2 = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$

c) Notons $\chi_A = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{m_i}$ Justifier que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^m \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)^{m_i}$. En déduire que A est diagonalisable.

d) Version plus difficile du même exercice (un peu snob pour Centrale je trouve) : transformer l'hypothèse « Γ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ par » par « Γ est stable par produit ». En fait, on montrera que la compacité entraîne qu'avec cette seule hypothèse Γ est encore un sous-groupe.

Exercice 10 (Centrale PSI 2021)**.** Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

a) Montrer que les boules de E sont convexes.

b) Soit C une partie convexe de E. On suppose que C est dense dans E. Montrer que $C = E$:

   i) dans le cas où $E = \mathbf{R}$,

   ii) dans le cas général.

Indication – Une méthode possible pour le b) (ii) est de raisonner par récurrence sur la dimension, en montrant que si H est un hyperplan de E alors $C \cap H$ est dense dans H