Exercice 1 (CCINP MP 2022)**.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$u : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$$
$$P \longmapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$$

a) Montrer que u est un endomorphisme.

b) Prouver que u est diagonalisable et trouver ses espaces propres.

Exercice 2 (CCINP MP 2022)**.** Soit $n \geqslant 2, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 sur la diagonale, sur la première colonne et sur la première ligne, puis des 0 partout ailleurs.

a) Montrer que A est diagonalisable

b) Cas $n = 2$: Calculer les éléments propres de A.

c) Cas $n \neq 2$:

   i) Montrer que 1 est une valeur propre de A.

   ii) Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que 1 , alors $(\lambda - 1)^2 = n - 1$. Expliciter les éléments propres de A.

   iii) Calculer le déterminant de A en fonction de n.

Exercice 3 (CCINP MP 2022, ressemble au précédent)**.** Soit $n \geq 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;2n+1]\!]}$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1; 2n+1]\!], \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ ou } j \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4 (Mines-Telecom 2022, couplé avec l'étude de la somme d'une série de fonctions)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Résoudre l'équation $M^2 = A$ avec $M \in M_3(\mathbb{C})$.

b) Résoudre l'équation $M^2 = A$ avec $M \in M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (CCINP MP 2022, matrices stochastiques, énoncé modifié)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique i.e. telle que $\forall\, (i, j) \in [[1, n]]^2, a_{i,j} \geq 0$ et $\forall\, i \in [[1, n]], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A et donner un vecteur propre associé.

b) Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module au plus un et mieux montrer qu'elles sont dans la réunion des disques fermés $D_f(a_{i,i}, 1 - a_{i,i})$.

Exercice 6 (Centrale 1 2022, trigonalisation simultanée d'une famille d'endo. commutant entre eux, pas ma démo préférée, mais des outils conceptuels intéressants sur le chemin...)**.** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et on note E^* son dual, i.e. l'espace des formes linéaires sur E (à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc). On se donne $A \subseteq \mathcal{L}(E)$. On dit que A est trigonalisable s'il existe une base de trigonalisation commune à tous ses éléments. On suppose dans tout l'exercice que les éléments de A commutent deux à deux.

a) Montrer par récurrence sur la dimension n de E que les $u \in A$ admettent un vecteur propre commun.

On définit, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application :

$$^T u : \begin{cases} \varphi \to \varphi \circ u \\ E^* \to E^* \end{cases}$$

b) Montrer que $^T u \in \mathcal{L}(E^*)$.

c) Montrer que si φ est un vecteur propre de $^T u$ alors $\ker \varphi$ est un hyperplan stable par u.

d) Déduire de ce qui précède qu'il existe un hyperplan stable par tous les $u \in A$.

e) Conclure que A est trigonalisable.

Exercice 7 (CCINP MP 2022). Soit $A \in M_6(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 8$.

a) Quelles sont les valeurs propres possibles de A.

b) A est-elle dz ?

c) Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

Exercice 8 (CCINP MP 2022 (Enoncé un peu contracté par rapport à l'énoncé original...)). Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ et $T : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $\forall f \in E,\ T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}dt$.

a) Montrer que $T(E) \subset E$, et que T est un endomorphisme de E.

b) Montrer que T est injectif. Est-ce que T est surjectif ?

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

Exercice 9 (Mines-Ponts 2022 (plutôt facile si on a la culture minimale sur le sujet)). Un endomorphisme f est dit cyclique, dans un e.v. E tel que $\dim E = n$, ssi :

$$\exists x_0 \in E : \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right) = E.$$

a) Soit g un endomorphisme tel que sa matrice dans $\mathbb{R}^3$ soit :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est cyclique et diagonalisable.

b) Un endomorphisme f cyclique est-il toujours diagonalisable ?

c) Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres distinctes deux à deux. Est-il cyclique ?

d) Soit f un endomorphisme diagonalisable et cyclique. Ses valeurs propres sont-elles distinctes deux à deux ?

Exercice 10 (Pas si loin du précédent.... avec un angle très différent... plus original...Centrale 1 MP 2022). Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que M vérifie la propriété (C) si il existe une famille libre $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de vecteurs de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

— $E := \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est stable par l'endomorphisme dérivation $D : f \to f'$.

— M est la matrice associée à l'endomorphisme $D_{|E}$ dans la base B.

a) Montrer que toute matrice semblable à une matrice vérifiant (C) vérifie aussi (C), puis montrer qu'une matrice possédant n valeurs propres distinctes vérifie (C.)

b) (Enoncé simplifié :) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant (C). On note π_M le polynôme minimal de M. En considérant $\ker \pi_M(D)$ montrer que $\pi_M = \chi_M$.

c) (Difficile ?) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\pi_M = \chi_M$, montrer que M vérifie (C).