Exercice 1 (CCINP MP 2022)**.** Pour $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^a)^n}$.

a) Montrer que $I_n(a)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

b) Montrer que la suite $(I_n(a))$ converge et déterminer sa limite.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver une relation de récurrence entre $I_n(a)$ et $I_{n+1}(a)$.

d) On pose $w_n(a) = \ln I_n(a) + \frac{\ln n}{a}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

(i) Montrer que $w_{n+1}(a) - w_n(a) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(ii) Monter que $\left(n^{\frac{1}{a}} I_n(a)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 (Mines Ponts 2022 Quickly de fin de colle, intégrale de Fresnel, voir le calcul complet ex. 10)**.** Domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(t^x)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 (CCINP 2022, bien de l'action avec des D.E.S. à la fin :-))**.**

a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}, |\arctan u| \leqslant |u|$.

b) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$

i) Domaine de définition de F ?

ii) Domaine de continuité de F ?

iii) Domaine de dérivabilité de F ?

iv) Déterminer F'.

v) En déduire F.

Exercice 4 (CCINP MP 2022 inusable transformée de Laplace du sinus cardinal)**.**

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Calculer F' sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Calculer F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Bonus plus difficile : Mines-Centrale : continuité de F en 0

Exercice 5 (CCINP MP 2022)**.** Soit F la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}_+$par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

a) Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$et montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer F'. On donne $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Exprimer F.

Exercice 6 (CCINP MP 2022 en fait a) et b) sont dans la banque, mais c'était l'exo « inconnu »)**.** Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner Γ'.

c) Montrer que : $\forall x > 1, \forall \lambda \in]-1,1\left[,\quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n \Gamma(x)}{(n+1)^x}\right.$.

Exercice 7 (CCINP PSI 2012 : à rapprocher en bien plus élémentaire de la « formule sommatoire de Poisson » reliant transformée de Fourier et séries de Fourier)**.**

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(x+n) + \varphi(x-n)].$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est 1-périodique.

c) Soit g une fonction 1-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 8 (Centrale 1 2021... classiques inusables... la variable complexe pimente un peu...)**.**

a) Montrer que $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{s-1} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > 0$.

b) En déduire la formule, suivante :

$$\forall\, s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0,\ \Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

c) En déduire que

$$\forall\, s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0, \Gamma(s) \neq 0$$

Exercice 9 (Mines 2021)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 e^{(1-t)nx} f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$$

Exercice 10 (Prolonge l'exercice 2 : calcul des intégrales de Fresnel)**.** Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on note $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i} dx$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$

b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $F'(t)$ pour tout $t > 0$.

On suppose connue $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}$.

d) On admettra ici le résultat suivant (cf. ex. 11) : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+i} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(i+1)$.

Montrer alors que $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge et calculer sa valeur.

En déduire les valeurs de $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

Exercice 11 (« valeur principale » de l'intégrale de $1/(x-\alpha)$)**.** a) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ qu'on écrit $\alpha = a + ib$ avec $b \neq 0$.

Démontrer que $\lim_{X\to+\infty} \int_{-X}^{+X} \frac{dx}{x-\alpha} = i\pi sgn(b)$

N.B Attention cela n'a pas de sens d'écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-\alpha}$ car cette intégrale est divergente. Ici on considère des intégrales « symétriques » particulières.

b) Utiliser le résultat pour le calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+i} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(i+1)$ admis à l'exercice précédent.

Exercice 12 (Centrale 2 2022)**.** Soit $\beta > 0$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \quad I_\beta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} \mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que C et I_β sont définies sur $\mathbb{R}$.

b) **Python :** (i) Définir une fonction qui calcule C. (ii) Représenter $x \mapsto C(x)\mathrm{e}^x$, conjecturer une expression de C sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $I_\beta(x) - I''_\beta(x) = \frac{\beta}{\beta^2+x^2}$ pour tout x réel.

d) On pose $F_\beta(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\beta \mathrm{e}^{-t}}{\beta^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $J_\beta(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x F_\beta(x) + \mathrm{e}^{-x} F_\beta(-x)\right)$.

(i) Montrer que : $J_\beta(x) - J''_\beta(x) = \frac{\beta}{\beta^2+x^2}$ pour tout x réel. (ii) Conclure que $I_\beta = J_\beta$.

e) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F_{\frac{1}{n}}(x) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

f) En déduire la valeur de $C(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.