Exercice 1 (CCINP MP 2022)**.** Soit E un espace euclidien et F le sous-espace vectoriel de E engendré par u, où $u \in E \smallsetminus \{0\}$. Soit β une base orthonormale de E et p est la projection orthogonale sur F.

a) (i) Soit $x \in E$, montrer que $p(x) = \frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}.\ u$.

(ii) Montrer que $\mathrm{Mat}_\beta(p) = \frac{UU^\top}{U^\top U}$ où $U = \mathrm{Mat}_\beta(u)$.

b) Soit $A = UU^\top$ (i) Montrer que A est dz (ii) Déterminer les sous-espaces propres de A.

c) En posant $M = I_n - UU^\top$ et par observation de la matrice, déterminer des caractéristiques sur M.

Exercice 2 (CCINP MP 2022)**.** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Soit p la projection orthogonale sur F.

a) i) Montrer que $F = \{x \in E \mid \|x\| = \|p(x)\|\}$.

ii) Montrer que : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

iii) Montrer que $\forall x, y \in E, \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. Qu'en déduire ?

b) Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels de E. On note p_F, p_G et p_H les projections orthogonales sur ces sous-espaces. On suppose que $p_F \circ p_G = p_H$.

i) Montrer que $F \cap G = H$.

ii) Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.

iii) On suppose réciproquement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$. Montrer qu'il existe H sous-espace vectoriel de E tel que $p_H = p_F \circ p_G$.

Exercice 3 (Mines Telecom 2022)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $XX^\top X = -\mathrm{I}_n$.

a) Montrer que X est symétrique.

b) Déterminer X.

Exercice 4 (CCINP MP 2022)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle. Soit p un projecteur orthogonal.

a) Montrer que p est symétrique.

b) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

c) Montrer que l'on a :

$$(\mathrm{Ker}\, q + \mathrm{Im}\, p)^\perp = \mathrm{Im}\, q \cap \mathrm{Ker}\, p.$$

d) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable

Remarque : on peut montrer, mais c'est plus difficile, que la composée de deux autoadjoints positifs est toujours dz. C'est plus facile si l'on suppose que l'un des deux est défini positif.

Exercice 5 (Autre méthode pour l'exercice précédent : avec l'écriture matricielle)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. On veut montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

On considère une b.o.n. $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(q) = B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(p) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2^\top \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$.

On considérant AB montrer que $p \circ q$ est bien dz.

Exercice 6 (CCINP MP 2022)**.** Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) On suppose que u possède deux valeurs propres réelles non nulles et de signes opposés. Montrer qu'il existe $z \neq 0$ tel que $u(z) \perp z$

b) On suppose que u est symétrique de trace nulle. Montrer qu'il existe z non nul tel que $u(z) \perp z$.

c) On suppose que u est simplement de trace nulle. Introduire la matrice A canoniquement associée à u et puis l'endomorphisme v canoniquement associé à $B = A + A^\top$, et obtenir encore la même conclusion.

Exercice 7 (Centrale MP 2022 : classique et important à ce niveau)**.** a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = S^2$.

b) **Théorème très utile de réduction simultanée à connaître même si H.P. :** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ et $\Delta \in \mathcal{M}(\mathbf{R})$ diagonale telles que $A = P^T P$ et $B = P^T \Delta P$

c) Soient $A_1 \in \mathcal{S}_p(\mathbf{R}), A_2 \in \mathcal{S}_{n-p}(\mathbf{R}), B \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{R})$ et $A = \begin{pmatrix} A_1 & B^T \\ B & A_2 \end{pmatrix}$. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Comparer $\det(A)$ et $\det(A_1)\det(A_2)$

Exercice 8 (Centrale MP 2022, pseudo-inverse)**.** Soient E et F deux espaces euclidiens de dimensions respectives n et $m, L \in \mathcal{L}(E,F)$.

a) Montrer que la restriction M de L à $(KerL)^{\perp}$ est bijective de $(KerL)^{\perp}$ sur $\mathrm{Im}(L)$.
Soit Π le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{lm}(L)$ et $L^{+} = M^{-1} \circ \Pi$.

b) Montrer que $L^{+} \circ L$ est le projecteur orthogonal P sur $(KerL)^{\perp}$, que $L \circ L^{+} = \Pi$.

c) Montrer que $L \circ L^{+}$et $L^{+} \circ L$ sont symétriques, que $L \circ L^{+} \circ L = L, L^{+} \circ L \circ L^{+} = L^{+}$.

d) Soit $b \in F$. Montrer que $L^{+}(b)$ réalise la borne inférieure de $\{\|L(x) - b\|, x \in E\}$. Montrer que, parmi tous les $x \in E$ réalisant la borne inférieure de $\{\|L(x) - b\|, x \in E\}, L^{+}(b)$ est de norme minimale.

Exercice 9 (Centrale MP 2022)**.** Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On pose :

$$S = \left\{ s \in \mathcal{L}(E); \exists u \in \mathcal{O}(E), s = \frac{u + u^{-1}}{2} \right\}$$

a) Soit $s \in S$. Montrer que s est symétrique et que ses valeurs propres sont dans $[-1,1]$. Montrer que les valeurs propres de s appartenant à $]-1,1[$ sont de multiplicité paire.

b) Réciproquement, soit $s \in \mathcal{S}(E)$, à valeurs propres dans $[-1,1]$ et dont les valeurs propres appartenant à] -1 , 1[sont de multiplicité paire. Montrer que $s \in S$.

Exercice 10 (Centrale MP 2022 encore la réduction simultanée)**.** Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{R})$ et $D \in M_n(R)$ diagonale telles que $A = P^T P$ et $B = P^T D P$.

b) On suppose maintenant B définie positive. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}^{+})^2$ tel que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que $\det\ (\alpha A + \beta B) \leq \det(A)^{\alpha}\ \det(B)^{\beta}$

Solution 1 a) (i) c'est du cours proj. orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(u)$ de b.o.n. $u/\|u\|$.

(ii) Traduction matricielle du (i) : notons $M = \mathrm{Mat}_\beta(p)$.

si $X = \mathrm{Mat}_\beta(x)$ on sait que $\langle x, u\rangle = U^\top X$ et que $||u||^2 = U^\top U$

Donc $MX = \dfrac{(U^\top X)}{U^\top U} U$

Mais comme le $(U^\top X)$ au numérateur est un nombre, il commute à U donc on peut l'écrire : $MX = \dfrac{U.(U^\top X)}{U \top U}$.

Par associativité du produit matriciel :

$MX = \frac{UU^\top}{U^\top U} X$.

Cette égalité étant vraie pour tout X, on conclut que $M = \frac{UU^\top}{U^\top U}$.

b) (i) A est sym. réelle (ii) Matrice de rang un et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(UU^\top) = ||u||^2 \neq 0$ donc 0 v.p. de mult. géom $n-1$ et $||u||^2$ v.p. distincte de 0. donc la dz. et les deux sev propre hyperplan noyau et droite propre pour la v.p. $||u||^2$: cette droite est la droite dirigée par u car $UU^\top(U) = U(U^\top U) = \lambda U$ avec $\lambda = U^\top U$.

c) Avec la dz du b) M est dz avec v.p. 1 de mult. géom $n-1$ et v.p $1-\lambda$. Elle est aussi symétrique réelle.

Solution 2 a) (i) Si $x \in E$, $||x||^2 = ||p(x)||^2 + ||x-p(x)||^2$ d'où l'équivalence $||x|| = ||p(x)|| \Leftrightarrow x-p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

(ii) Encore la relation de Pythagore du (i)

(iii) En fait $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y) + (y - p(y))\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle + 0$.

De même $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.

Ainsi un projecteur orthogonal est un endomorphisme autoadjoint.

b) (i) Si $x \in F \cap G$ alors $p_G(x) = x$ et $p_F(x) = x$, donc $p_F \circ p_G(x) = x$ donc $p_H(x) = x$ donc $x \in H$.

Réciproquement soit $x \in H$, alors $p_H(x) = x$ donc $p_G(p_F(x))) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p_G = G$.

D'autre part, *par l'absurde* si $x \notin F$ alors $\|p_F(x)\| < \|x\|$ et comme $\|p_G(y)\| \leq ly\|$, on a alors $\|p_G(p_F(x))\| < \|x\|$ contradiction avec $p_H(x) = x$.

(ii) Comme p_H est autoadjoint et que $p_F \circ p_G = p_H$, on a $(p_F \circ p_G)^* = p_H^* = p_H = p_F \circ p_G \quad (1)$.

Mais d'autre part par prop de l'adjoint, $(p_F \circ p_G)^* = p_G^* \circ p_F^* = p_G \circ p_F \quad (2)$ car p_F, p_G sont autoadjoints.

Avec (1) et (2), on a la conclusion : $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.

(iii) Notons $\pi = p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$. Alors $\pi^2 = p_F \circ p_G \circ p_G \circ p_F = p_F \circ p_G \circ p_F = p_F \circ p_F \circ p_G = \pi$.

Donc π est bien un projecteur. D'autre part $\pi^* = (p_F \circ p_G)^* = p_G^* \circ p_F^* = \pi$ idem (ii).

Donc π est un projecteur autoadjoint ie.$\ker \pi^\perp = \mathrm{Im}\, \pi$ donc π projecteur orthogonal donc $\pi = p_H$ pour un certain s.e.v. H, qui bien sûr est alors $H = F \cap G$.

Solution 3 a) On a $X.(X^\top X) = -I_n$ donc X est inversible d'inverse $-X^\top X$.

Or $-X^\top X$ est égale à sa transposée donc symétrique donc X^{-1} est elle-même symétrique.

Or l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique car si A sym. et $AB = I_n$ en transposant on a $B^\top A^\top = I_n$ donc $B^\top A = I_n$ donc $B^\top$ est l'inverse de A et donc $B^\top = B$.

Ainsi ici X^{-1} est symétrique donc X est symétrique.

b) Sachant que X est symétrique on écrit $X = PDP^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{R})$.

Comme X est symétrique l'équation de l'énoncé devient $X^3 = -I_n$ qui se transmet en $D^3 = -I_n$. Mais alors pour tout i, $\lambda_i^3 = -1$ ce qui avec les λ_i réels donne : $\lambda_i = -1$ donc $D = -I_n$ et finalement $X = -I_n$.

Solution 4 a) Par exemple parce qu'il est dz dans une b.o.n. (adaptée à la décomposition $\ker p \oplus Fixp = E$.

b) Soit $(x, y) \in E^2$, $(p \circ q \circ p(x)|y) = (q \circ p(x)|p(y)) = (p(x)|q \circ p(y)) = (x|p \circ q \circ p(y))$, calcul où on a utilisé successivement le caractère symétrique de p puis q, puis p. On peut aussi utiliser la représentation matricielle.

c) Si $x \in \ker p \cap \mathrm{Im}\, q$ et $y = y_1 + y_2 \in \ker q + \mathrm{Im}\, p$.

Alors $(x|y) = (x|y_1) + (x|y_2)$ et les deux p.s. sont nuls car $\mathrm{Im}\, q \perp \ker q$ et $\ker p \perp \mathrm{Im}\, p$.

D'où l'inclusion :

$$\ker p \cap \operatorname{Im} q \subset (\ker q + \operatorname{Im} p)^{\perp} \quad (1)$$

L'autre inclusion avec les dimensions :

$$\begin{aligned}\dim(\ker p \cap \operatorname{Im} q) &= \dim \ker p + \dim \operatorname{Im} q - \dim(\ker p \cap \operatorname{Im} q),\\ &= n - \dim \operatorname{Im} p + n - \dim \ker q - \dim(\ker p \cap \operatorname{Im} q),\\ &= 2n - (\dim(\operatorname{Im} p + \ker q) + \dim(\operatorname{Im} p \cap \ker q)) - \dim(\ker p \cap \operatorname{Im} q)\\ &= \dim((\operatorname{Im} p + \ker q)^{\perp}) + \dim(\ker p \cap \operatorname{Im} q)^{\perp} - \dim(\operatorname{Im} p \cap \ker q) \quad (2)\end{aligned}$$

Or par symétrie des rôles dans (1), on a aussi :

$$\ker q \cap \operatorname{Im} p \subset (\ker p + \operatorname{Im} q)^{\perp} \quad (1')$$

Avec $(1')$ dans (2), on a :

$$\dim(\ker p \cap \operatorname{Im} q) \geq \dim((\operatorname{Im} p + \ker q)^{\perp})$$

ce qui avait (1) donne l'égalité cherchée !

d) On sait par la question précédente que $E = (\ker p \cap \operatorname{Im} q) + \ker q + \operatorname{Im} p$.

on voit E comme somme, pas forcément directe, de trois s.e.v. Si on mq la restriction de $p \circ q$ à chacun de ces s.e.v. est dz alors $p \circ q$ sera dz car la concaténation de base de dz donnera une famille génératrice de dz, de laquelle on pourra extraire une base.

• d'un côté $(p \circ q)_{|\operatorname{Im} p} = (p \circ q \circ p)_{|\operatorname{Im} p}$ car $p_{\operatorname{Im} p} = \mathrm{id}$ et par b), on sait que $p \circ q \circ p$ est dz donc sa restriction aussi.

• ensuite $(p \circ q)_{|\ker q} = 0$ donc trivialement dz

• enfin comme $q_{|\operatorname{Im} q} = \mathrm{id}$, on sait que $(p \circ q)_{|\operatorname{Im} q} = p_{|\operatorname{Im} q}$ et donc $(p \circ q)_{|\operatorname{Im} q \cap \ker p} = 0$ aussi.

Cela suffit pour conclure.

Solution 5 On sait que $AB = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait aussi que A_1 est symétrique réelle donc dz.

Alors pour toute v.p. $\lambda \neq 0$ de A_1, on a $A_1 - \lambda I$ non inversible et donc $AB - \lambda I = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ A_2 & -\lambda I_{n-r} \end{pmatrix}$ non inversible et même $\mathrm{rg}(AB - \lambda I) = \mathrm{rg}(A_1 - \lambda I_r)$.

Reste le pb. de la v.p. zéro : on veut montrer que $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(AB)$.

Ainsi on aura exactement la bonne dimension des s.e.v. propres pour AB au total.

A reprendre : Il nous faut donc juste prouver que $\mathrm{rg}\,\mathrm{AB} = \mathrm{rg}\,\mathrm{A}_1$. Cela revient à montrer que si $\mathrm{A}_1\mathrm{X} = 0$ alors $\mathrm{A}_2\mathrm{X} = 0$ (pour X vecteur colonne de taille r). Ici c'est facile car la propriété $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ donne $\mathrm{A}_1^2 + {}^t\ \mathrm{A}_2\ \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1$. Donc si $\mathrm{A}_1\mathrm{X} = 0$ on a ${}^t\ \mathrm{A}_2\ \mathrm{A}_2\mathrm{X} = 0$ puis $\|\mathrm{A}_2\mathrm{X}\|^2 = 0$ soit $\mathrm{A}_2\mathrm{X} = 0$ en multipliant par ${}^t\mathrm{X}$ à gauche.

Solution 6 a) On prend x, y non nuls tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ avec $\lambda.\mu < 0$.

On prend $z = x + \alpha y$, on veut que $(u(z)|z) = 0$ i.e. $(\lambda x + \alpha\mu y | x + \alpha y) = 0$.

On obtient une équation du second degré en α de discriminant positif d'où l'existence de α.

b) On sait que u est dz donc admet une base de vecteurs propres. Et comme la somme des v.p. fait 0, si u n'est pas l'application nulle, elle a deux v.p. de signes opposés strictment et on est ramené au a).

c) On applique le b) à v qui est symétrique et encore de trace nulle par linéarité de la trace.

On en déduit qu'il existe un x tel que $(v(x)|x) = 0$. Mais $(v(x)|x) = (u(x)|x) + (u^*(x)|x) = 2(u(x)|x)$ d'où la conclusion.

Solution 7 a) ok

b) Avec la racine carrée : $A \in \mathcal{S}_n^{++} \Rightarrow \exists R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A = {}^tRR$ d'après le théorème spectral. En effet, $A = P_1 \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t P = {}^tRR$ où $R = {}^t\left(P_1 \operatorname{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)\right)$. ${}^tR^{-1}BR^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{O}(n), {}^tR^{-1}BR^{-1} = QD^tQ$. Donc $B = {}^tPDP$ où $P = {}^tQR$ et l'on vérifie que $A = {}^tPP$ car $Q \in \mathcal{O}(n)$.

c)