Exercice 1 (Mines Telecom 2022)**.** Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

a) Que vaut $\mathbf{P}(X \geq k)$ pour $k \in \mathbf{N}^\star$?

b) Yves et Zak disposent chacun d'une pièce ayant la probabilité p de tomber sur pile. Yves lance la pièce jusqu'à l'obtention de pile, puis Zak fait de même. Quelle est la probabilité qu'il faille deux fois plus de lancers à Zak d'obtenir pile que Yves n'en a eu besoin ?

Exercice 2 (Mines Telecom 2022)**.** Soient $p \in]0,1[$ et $r \in N^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte. Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

a) Déterminer la loi de X.

b) Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 3 (Navale/St Cyr 2022)**.** Chaque jour, il y a Y clients, où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, et chaque client a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être satisfait. Soit X le nombre de clients satisfaits.

a) Préciser la loi de Y puis celle de X conditionnellement à l'événement $(Y = n)$.

b) Calculer la loi du couple (X, Y) puis celle de X.

Exercice 4 (CCINP 2022, très proche du précédent... un peu en sens inverse.. et plus complet.)**.** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}^2$, dont la loi jointe est donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X = n, Y = k) = e^{-b}\frac{b^n}{k!(n-k)!}a^k(1-a)^{n-k} & \text{si } (k,n) \in \mathbf{N}^2 \quad k \leq n, \\ \mathbf{P}(X = n, Y = k) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.

b) Montrer que Y suit la loi de Poisson de paramètre ab. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de $X - Y$. Vérifier que Y et $X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 5 (Navale 2022)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini inclus dans $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbf{N}, \mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)$. Montrer que X et Y suivent la même loi.

Exercice 6 (Mines Telecom 2022)**.** On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules en même temps dans l'urne. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la plus petite boule tirée.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer $\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$

c) Calculer l'espérance de X.

Exercice 7 (CCINP MP 2021)**.** a) Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}, p \in \mathbf{N}^*$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}(X = n) = \frac{p}{n}\mathbf{P}(X = n-1)$. Déterminer la loi de X.

b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. i) Calculer E $\left(\frac{1}{1+X_1}\right)$. ii) Donner la loi de $X_1 + X_2$. iii) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Préciser l'espérance et la variance.

c) Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_2 + X_3$. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de (U, V).

Attention : normalement le coeff. de corrélation n'est pas une notion au programme, mais bon c'est visiblement demandé et naturel

$$\rho(U,V) = \frac{\text{Cov}(U,V)}{\sigma(U).\sigma(V)}$$

Exercice 8 (Centrale MP 2022 : loi forte des grands nombres sur un cas particulier)**.**

a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire réelle.

b) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer de deux manières $\mathrm{E}\left((S_n)^4\right)$.

c) Montrer que S_n/n converge presque sûrement vers 0.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Montrer que $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 9 (Centrale MP 2022 : la notion d'espérance conditionnelle et la formule de l'espérance totale)**.** Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour un événement $A \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle, si la famille $(x\mathbf{P}(X = x \mid A))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, on appelle espérance conditionnelle de X sachant A :

$$\mathrm{E}(X \mid A) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x \mid A)$$

a) Donner une condition suffisante simple pour que $\mathrm{E}(X \mid A)$ soit bien définie.

b) Soit $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un système complet d'événements. Montrer : $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)\,\mathbf{E}(X \mid A_k)$.

c) Manquant, je complète avec un bébé exemple tiré de Wikipédia pour se familiariser avec la formule du b) (mais le vrai c) devait être plus dur !) : Supposons que deux usines fabriquent des ampoules électriques. Les ampoules de l'usine X ont une durée de vie de 5000 heures, alors que ceux de l'usine Y fonctionnent en moyenne pendant 4000 heures. On dit que l'usine X fournit 60% de toutes les ampoules disponibles. Combien de temps peut-on espérer qu'une ampoule achetée durera ?

Exercice 10 (Mines-Ponts MP 2022)**.** Soient deux dés identiques, indépendants, tels que la variable aléatoire S qui donne leur somme suive la même loi que s'ils n'étaient pas truqués. Montrer qu'ils ne sont pas truqués.

Exercice 11 (Mines-Ponts 2022)**.** Soit $n \geq 2$. On pose $J = (J_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ où $J_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $J_{1,n} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

a) Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et les vecteurs propres de J.
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On considère la matrice aléatoire M

$$= \begin{pmatrix} X_0 & X_{n-1} & \cdots & \cdots & X_1 \\ X_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ X_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & \cdots & X_2 & X_1 & X_0 \end{pmatrix}.$$

b) Exprimer M en fonction de J.

c) Pour $n = 2$, calculer $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$.

d) Déterminer le spectre (complexe) de M.

e) On suppose n premier, et on admet que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Calculer $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$.