Exercice 1 (Mines Telecom 2022, 30 min. sans prép.). a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) sur des ensembles à préciser.

b)(Sera fait avec la pl. R mis ici pour montrer les couplages) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[0,1]$, telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. (i) Montrer que 1 est valeur propre de A. (ii) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et que pour $\omega > 0, |\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$.

Exercice 2 (CCINP 2022). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

b) Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3 (Mines Telecom 2022). On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est continue sur son domaine.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

d) Donner le tableau de variation de f.

e) Donner la limite de f en $+\infty$.

(Couplé avec un calcul de racine carrée de matrice)

Exercice 4 (CCINP 2021 et 2022 !). Pour tout $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

a) Montrer que S est définie sur $]0,+\infty[$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et que pour tout $x > 0$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$.

b) Etudier la monotonie de S.

c) Montrer que pour tout $x > 0$, $S(x+1) + S(x) = \dfrac{1}{x}$. En déduire un équivalent de S en 0.

Exercice 5 (CCINP 2022). Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2n^2}$ où $x \in \mathbb{R}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de S ?

b) Montrer la continuité de S sur celui-ci.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

d) i) Calculer $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

ii) Donner un équivalent de S en 0 .

Exercice 6 (Centrale 1 2021). On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e_p(x) = e^{-px}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}x^k$.

a) Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$vers e_1. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

b) Montrer que $(p_n e_1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$vers e_2.

Exercice 7 (Mines-Ponts 2022). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.