Exercice 1 (Mines Telecom MP 2022)**.** Etudier suivant la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite définie par ce u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$.

Exercice 2 (CCINP MP 2022, analyse de sup essentiellement)**.**

a) Donner le développement en série de Taylor de l'exponentielle sur $[0;1]$

b) On pose $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$. Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et qu'elle est de limite nulle.

c) Donner un équivalent de I_n en partant d'une intégration par parties

d) (i)Exprimer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ en fonction de I_n (ii) Montrer la convergence de la suite $u_n = n\sin(2\pi n!e)$

Exercice 3 (Mines Telecom 2022)**.** En appliquant le théorème des accroissements finis, prouver l'encadrement

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

Exercice 4 (CCINP MP 2022)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On veut montrer que si P est scindé, alors P' est scindé aussi. Pour cela :

a) Énoncer le théorème de Rolle.

b) Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?

c) Montrer le résultat voulu.

Exercice 5 (Mines Telecom 2022 après un exo matrices symétrique et une série de fonctions...)**.** Nature de $\sum \cos\left(n^2\pi \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 6 (CCINP 2022, Archi-classique, méthode à connaître!)**.** Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. Pour $k \in \mathbf{Z}$, déterminer la nature de la série $\sum u_n^k$.

Exercice 7 (IMT 2022)**.** Déterminer la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin n}$.

Exercice 8 (CCINP 2022)**.** On donne $\alpha > 0$, $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$.

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$.

a) Justifier l'existence, pour tout n, de $\ln(S_{n+1})$, et l'exprimer à l'aide de $\ln(S_n)$.

b) Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$

d) Pour $\alpha \le \frac{1}{2}$, déterminer la limite de $(\ln(S_{n+1}))$; conclure sur la nature de la série $\sum_n u_n$.

Exercice 9 (IMT 2022)**.** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Nature de la série $\sum u_n$?
Indication – On pourra sommer par paquets.

Exercice 10 (Centrale 1 MP 2022)**.** a) Étudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série de terme général (u_n), où (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall\, n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n) \end{cases}$

b) Étudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série de terme général (v_n), où (v_n) est définie par $v_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = e^{v_n} - 1$.

Exercice 11 (Centrale 2 MP 2022, grand classique, avec l'incontournable problème du calcul des binomiaux)**.** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

a) Tracer les points $\left(k, \begin{pmatrix} 200 \\ k \end{pmatrix}\right)$ pour $k \in [\![1, 200]\!]$. Commenter la figure obtenue. Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{k<n/2}$ est croissante.

b) Tracer les points (n, u_n) pour $n \in [\![0, 100]\!]$. Conjecturer la convergence de la suite et la valeur de sa limite. Démontrer ce résultat.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{k}{\binom{n}{k}} = \frac{n}{2}u_n$.

d) Établir une relation entre u_n et u_{n+1}.