Exercice 1 (CCINP 2022)**.** Soit $a \in \mathbf{R}$. Pour tout $i \in [[0, n]]$, on note $P_i = (X - a)^i$.

a) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$

b) Soit $f : P \in \mathbf{R}_n[X] \mapsto (X - a)\left(P'(X) - P'(a)\right) - 2(P(X) - P(a))$. Montrer que f est un endomorphisme. Trouver son noyau et son image.

Exercice 2 (IMT 2022)**.** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $AB = 0$.

a) A-t-on nécessairement $BA = 0$?

b) Montrer que $\operatorname{tr}\left((A + B)^p\right) = \operatorname{tr} A^p + \operatorname{tr} B^p$ pour tout $p \geq 1$

c) Déterminer une relation entre $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$.

Exercice 3 (CCINP 2022)**.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, avec $\operatorname{rg} B = 1$.
Montrer que $\det(A + B)\det(A - B) \leq \det(A)^2$.

Exercice 4 (IMT 2022)**.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose A inversible, B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.

Exercice 5 (CCINP 2022)**.** Calculer les dimensions de $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, sous-espaces des matrices antisymétriques et symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En déduire le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $u(M) = M^\top$.

Exercice 6 (CCP MP 2022 pas facile pour une partie !)**.** Soit E un K-ev de dim. finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(f + g) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\} \\ \ker(f) + \ker(g) = E \end{cases}$

Exercice 7 (IMT MP 2022)**.** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; on pose $A^{-1} = (b_{ij})$. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

a) Donner les coefficients de $M = JA^{-1}$; déterminer son rang.

b) Montrer que $\det(A - J) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}\right)\det A$. *Indication* – Pour cette question un peu de réduction aide..

Exercice 8 (Centrale MP 2022)**.** Pour $(c_1 \cdots c_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit

$$V\left(c_1 \cdots c_n\right) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer $\det\left(V\left(c_1 \cdots c_n\right)\right)$. A quelle condition $V\left(c_1 \cdots c_n\right)$ est-elle inversible ?
On introduit les éléments suivants : $S_k = \sum_{\substack{(i_1 \cdots i_k) \in [1,n]^k \\ i_1 < i_2 \cdots < i_k}} c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ et

$$V_i\left(c_1 \cdots c_n\right) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{i-1} & c_1^{i+1} & \cdots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^{i-1} & c_n^{i+1} & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}$$

b) (i) Déterminer la forme développée de $\prod_{i=1}^n \left(X - c_i\right)$. (ii) En déduire $\det V_i\left(c_1 \cdots c_n\right)$.

c) Dans le cas où $V(c_1, \ldots, c_n)$ est inversible, déterminer son inverse.

Exercice 9 (Mines-Ponts MP 2022- 15 min de prép., suivi d'un exercice sur les normes duales)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \det\left(\lambda A^2 + I_n\right) \geqslant 0$.

b) On suppose maintenant que A est antisymétrique. Montrer que le résultat précédent est alors valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. *Indication* – Pour cette question un peu de réduction aide..