Banque CCINP : Ex. 33, 41, 52, 56, 57, 58.

Continuité, différentiabilité, caractère $\mathcal{C}^1$ de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ « concrètes »

Exercice 1. On pose $f(x,y) = \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$.

En considérant $f(x,x^2)$ justifier que f n'est pas continue en 0. Montrer néanmoins que f admet une dérivée suivant tout vecteur en 0.

Exercice 2 (Vérification du caractère $\mathcal{C}^1$)**.** Soit $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $f(0,0)=0$. Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Comment montrer qu'une fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$)**.** On pose $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? De classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 (Pour bosser mais pas trop)**.** Soit $f\ :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \exp(1/(x^2+y^2-1)) & \text{si } x^2+y^2<1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que la fonction f suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$ en fait).

Calcul de différentielles sans passer par les dérivées partielles

Exercice 5 (Exemples traités en cours ou proches)**.**

a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Expliciter $df(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\|\ \|$ sa norme euclidienne. Montrer que cette application norme de $E \smallsetminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^+$ est différentiable et calculer sa différentielle de deux manières : **(M1)** sans coordonnées, en reliant la norme au produit scalaire, et en utilisant la linéarité du p.s **(M2)**

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et (en identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$), $f\ :\ x \mapsto (Ax|x)$. Calculer $df(x)$ et $\nabla f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. (avec les deux méthodes du b)).

d) Calculer le gradient de l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (pour le p.s can.) et en déduire la différentielle du déterminant.

Exercice 6. a) Dans $E = M_n(\mathbb{K})$ pour $f\ :\ M \to M^2$, calculer $df(A).H$ pour tout $(A,H) \in E^2$.

b) Généralisation du a) pour $f\ :\ M \to M^p$?

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f : x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \longmapsto f(x) := \frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2}$. Calculer $\nabla f(x)$ en $x \neq 0$ et le comparer à la projection orthogonale de Ax sur l'hyperplan H_x orthogonal à x.

Utilisation de la dérivation le long d'une courbe (souvent une droite)

Exercice 8 (Cas de l'inversion de matrice)**.** a) Justifier à l'aide du cours que $f\ :\ M \in GL_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) A l'aide de l'exercice fait sur la planche F_1 pour les applications $t \mapsto A(t)^{-1}$, donner une formule pour $df(A).H$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $\overline{x} \in U$ et $f\ :\ U \to \mathbb{R}$ continue sur U, différentiable sur $U \smallsetminus \{\overline{x}\}$.

On suppose que $\forall\, x\ \in U,\ df(x).(x-\overline{x}) \geq 0 \quad (*)$.

Montrer que f admet un minimum local en $\overline{x}$.

Extrema globaux

Exercice 10 (Fonctions convexes : caractérisations par la différentielle)**.** Soit Ω un ouvert convexe de $E=\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$.

On dit que f est convexe sur Ω ssi $\forall\,(a,b) \in \Omega^2,\ \forall\, t \in [0,1],\ f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b)$.

a) Fonctions auxiliaires d'une variable réelle :

Pour tout $a \in \Omega$ et tout $x \in E \smallsetminus \{0\}$, on pose $I_{a,x} = \{t \in\ \mathbb{R},\ a+tx \in \Omega\}$.

On pose $\varphi_{a,x}\ :\ I_{a,x} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(a+tx)$.

Montrer que f est convexe sur Ω si, et seulement si, toutes les fonctions $\varphi_{a,x}$ pour $a \in \Omega$ et $x \in E$ sont convexes.

b) On suppose que f est différentiable sur Ω.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur Ω,

(ii) $\forall\,(a,b)\in\Omega^2,\ df(b)(b-a)\geq df(a)(b-a)$,
(iii) $\forall\,(a,b)\in\Omega^2,\ f(b)-f(a)\geq df(a)(b-a)$.
On pourra admettre l'implication (iii)⇒ (i)

c) On suppose encore que f est différentiable sur Ω. Soit $a\in\Omega$ un point critique de f i.e. tel que $df(a)=0$. Montrer que $f(a)$ réalise le minimum global de f sur Ω.

Exercice 11 (Exemple fondamental de fonctions convexes : les formes quadratiques positives)**.** Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ et on note $A.x\in\mathbb{R}^n$ l'image du vecteur $x\in\mathbb{R}^n$ par la matrice A.

On considère la *forme quadratique* $f:\ x\mapsto(Ax|x)$ où $(\ |\ )$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que si A est une matrice symétrique *positive* alors f est une fonction convexe.

b) Montrer que si A est une matrice symétrique *définie positive* alors f est une fonction strictement convexe.

Exercice 12 (Cas d'une fonction strictement convexe coercive)**.** Soit E un e.v.n. de dim. finie et C un sous-ensemble convexe de E.

a) Soit $f\ :C\ \to\mathbb{R}$. On dit que f est *strictement convexe* sur C ssi pour tout $(a,b)\in C^2$ avec $a\neq b$ et pour tout $t\in]0,1[$, $f((1-t)a+tb)<(1-t)f(a)+tf(b)$.
Montrer que si f admet minimum dans C alors celui-ci est atteint en un unique point.

b) On suppose que C est un convexe fermé et que $f\ :C\ \to\mathbb{R}$ est coercive sur C ce qui signifie que si C est non borné $f(x)\underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Montrer que f admet un unique minimum dans C.

c) Exemple concret : on identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on considère $f\ :\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{2}(Ax|x)+(b|x)+c$ avec A une matrice symétrique définie positive, $b\in\mathbb{R}^n$ et $c\in\mathbb{R}$.
Montrer que f admet un minimum dans $\mathbb{R}^n$, atteint en un unique point $\overline{x}$.

Hessienne

Exercice 13. a) Pour $A\in M_n(\mathbb{R})$, b et c dans $\mathbb{R}^n$, et $f\ :x\ \mapsto\dfrac{1}{2}<Ax|x>+<b|x>+c$.

Déterminer la hessienne $H_f(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}^n$.

b) Soit $r\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $\forall\,x\in\mathbb{R}^n,\ g(x)=r(x)^2$. Calculer $H_g(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}^n$.

Exercice 14. Soit $f\in\ \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que f est convexe sur U ssi $\forall\,x\ \in U,\ H_f(x)\in S_n^+(\mathbb{R})$.

Indication Pour le sens ⇐, on pourra montrer que pour chaque couple $(x,y)\in U^2$, $\varphi:\ t\mapsto f(tx+(1-t)y)$ vérifie $\varphi''\geq 0$ sur $[0,1]$.

Etude locale à l'ordre deux pour les extrema

Exercice 15. Déterminer les extremums relatifs (i.e. locaux) et absolus (i.e. globaux) de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2.$$

Indication – Pour l'étude en $(0,0)$, on n'a pas de théorème mais on peut s'en tirer avec une idée simple.

Extrema sous contrainte

Exercice 16 (Cas où on a un *paramétrage* de l'hypersurface.. on se ramène à des extrema libres)**.** Soit $f\ :\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y$. Soit C le cercle unité.

Déterminer les extrema de $f_{|C}$ de deux façons :

— en paramétrant le cercle unité avec $\theta\mapsto(\cos(\theta),\sin(\theta))$

— avec le théorème sur les extrema liés.

Exercice 17 (Où l'on redémontre qu'une matrice symétrique réelle admet une v.p. réelle)**.** Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, muni de son p.s. can. et on considère $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto(Ax|x)$. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$/

a) Justifier que $f_{|S}$ admet un max. et un min.

b) A l'aide de la caractérisation différentielle des extrema locaux de $f_{|S}$, démontrer qu'il existe un $x\in S$ tel que Ax et x soient colinéaire, i.e. que A admet une v.p. réelle.