Banque CCINP : Ex. 33, 41, 52, 56, 57, 58.

Continuité, différentiabilité, caractère $\mathcal{C}^1$ de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ « concrètes »

Exercice 1. On pose $f(x,y) = \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$.

En considérant $f(x,x^2)$ justifier que f n'est pas continue en 0. Montrer néanmoins que f admet une dérivée suivant tout vecteur en 0.

Exercice 2 (Vérification du caractère $\mathcal{C}^1$)**.** Soit $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et $f(0,0)=0$. Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Comment montrer qu'une fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$)**.** On pose $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? De classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 (Pour bosser mais pas trop)**.** Soit $f\ :\ (x,y)\in\ \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \exp(1/(x^2+y^2-1)) & \text{si } x^2+y^2<1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que la fonction f suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$ en fait).

Calcul de différentielles sans passer par les dérivées partielles

Exercice 5 (Exemples traités en cours ou proches)**.**

a) Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Expliciter $df(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

b) Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\|\ \|$ sa norme euclidienne. Montrer que cette application norme de $E\ \smallsetminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}^+$ est différentiable et calculer sa différentielle de deux manières : **(M1)** sans coordonnées, en reliant la norme au produit scalaire, et en utilisant la linéarité du p.s **(M2)**

c) Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ et (en identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$), $f\ :\ x\mapsto(Ax|x)$. Calculer $df(x)$ et $\nabla f(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}^n$. (avec les deux méthodes du b)).

d) Calculer le gradient de l'application det : $M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ (pour le p.s can.) et en déduire la différentielle du déterminant.

Exercice 6. a) Dans $E=M_n(\mathbb{K})$ pour $f\ :\ M\to M^2$, calculer $df(A).H$ pour tout $(A,H)\in E^2$.

b) Généralisation du a) pour $f\ :\ M\to M^p$?

Exercice 7. Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f : x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\longmapsto f(x) := \frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2}$. Calculer $\nabla f(x)$ en $x\neq0$ et le comparer à la projection orthogonale de Ax sur l'hyperplan H_x orthogonal à x.

Utilisation de la dérivation le long d'une courbe (souvent une droite)

Exercice 8 (Cas de l'inversion de matrice)**.** a) Justifier à l'aide du cours que $f\ :\ M\in GL_n(\mathbb{K})\mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) A l'aide de l'exercice fait sur la planche F_1 pour les applications $t\mapsto A(t)^{-1}$, donner une formule pour $df(A).H$ pour tout $A\in GL_n(\mathbb{K})$ et $H\in M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $\overline{x}\in U$ et $f\ :\ U\to\mathbb{R}$ continue sur U, différentiable sur $U\smallsetminus\{\overline{x}\}$.

On suppose que $\forall\,x\ \in U\smallsetminus\{\overline{x}\}$, $df(x).(x-\overline{x})\geq0 \quad (*)$.

Montrer que f admet un minimum local en $\overline{x}$.

Extrema globaux

Exercice 10 (Fonctions convexes : caractérisations par la différentielle)**.** Soit Ω un ouvert convexe de $E=\mathbb{R}^n$. Soit $f\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$.

On dit que f est convexe sur Ω ssi $\forall\,(a,b)\in\Omega^2$, $\forall\,t\in[0,1]$, $f((1-t)a+tb)\leq(1-t)f(a)+tf(b)$.

a) Fonctions auxiliaires d'une variable réelle :

Pour tout $a\in\Omega$ et tout $x\in E\smallsetminus\{0\}$, on pose $I_{a,x}=\{t\in\ \mathbb{R},\ a+tx\in\Omega\}$.

On pose $\varphi_{a,x}\ :\ I_{a,x}\to\mathbb{R},\ t\mapsto f(a+tx)$.

Montrer que f est convexe sur Ω si, et seulement si, toutes les fonctions $\varphi_{a,x}$ pour $a\in\Omega$ et $x\in E$ sont convexes.

b) On suppose que $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur Ω,

(ii) $\forall\,(a,b)\in\Omega^2,\ df(b)(b-a)\geq df(a)(b-a)$,
(iii) $\forall\,(a,b)\in\Omega^2,\ f(b)-f(a)\geq df(a)(b-a)$.
On pourra admettre l'implication (iii)⇒ (i)
c) On suppose encore que f est différentiable et convexe sur Ω. Soit $a\in\Omega$ un point critique de f i.e. tel que $df(a)=0$. Montrer que $f(a)$ réalise le minimum global de f sur Ω.

Exercice 11 (Exemple fondamental de fonctions convexes : les formes quadratiques positives)**.** Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ et on note $A.x\in\mathbb{R}^n$ l'image du vecteur $x\in\mathbb{R}^n$ par la matrice A.

On considère la *forme quadratique* $f:\ x\mapsto (Ax|x)$ où $(\ |\ )$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que si A est une matrice symétrique *positive* alors f est une fonction convexe.

b) Montrer que si A est une matrice symétrique *définie positive* alors f est une fonction strictement convexe.

Exercice 12 (Cas d'une fonction strictement convexe coercive)**.** Soit E un e.v.n. de dim. finie et C un sous-ensemble convexe de E.

a) Soit $f\ :C\ \to\mathbb{R}$. On dit que f est *strictement convexe* sur C ssi pour tout $(a,b)\in C^2$ avec $a\neq b$ et pour tout $t\in]0,1[$, $f((1-t)a+tb)<(1-t)f(a)+tf(b)$. On suppose donc au a) et b) que f est stmt convexe sur C.
Montrer que si f admet minimum dans C alors celui-ci est atteint en un unique point.

b) On suppose que C est un convexe fermé et que $f\ :C\ \to\mathbb{R}$ est coercive sur C ce qui signifie que si C est non borné $f(x)\underset{||x||\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Montrer que f admet un unique minimum dans C.

c) Exemple concret : on identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on considère $f\ :\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{2}(Ax|x)+(b|x)+c$ avec A une matrice symétrique définie positive, $b\in\mathbb{R}^n$ et $c\in\mathbb{R}$.
Montrer que f admet un minimum dans $\mathbb{R}^n$, atteint en un unique point $\overline{x}$.

Hessienne

Exercice 13. a) Pour $A\in S_n(\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^n$ et $c\in\mathbb{R}$ et $f\ :x\ \mapsto\dfrac{1}{2}<Ax|x>+<b|x>+c$.

Déterminer la hessienne $H_f(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}^n$.

b) Soit $r\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $\forall\,x\in\mathbb{R}^n,\ g(x)=r(x)^2$. Calculer $H_g(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}^n$.

Exercice 14. Soit $f\in\ \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que f est convexe sur U ssi $\forall\,x\ \in U,\ H_f(x)\in S_n^+(\mathbb{R})$.

Indication Pour le sens ⇐, on pourra montrer que pour chaque couple $(x,y)\in U^2$, $\varphi:\ t\mapsto f(tx+(1-t)y)$ vérifie $\varphi''\geq 0$ sur $[0,1]$.

Etude locale à l'ordre deux pour les extrema

Exercice 15. Déterminer les extremums relatifs (i.e. locaux) et absolus (i.e. globaux) de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2.$$

Indication – Pour l'étude en $(0,0)$, on n'a pas de théorème mais on peut s'en tirer avec une idée simple.

Extrema sous contrainte

Exercice 16 (Cas où on a un *paramétrage* de l'hypersurface.. on se ramène à des extrema libres)**.** Soit $f\ :\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y$. Soit C le cercle unité.

Déterminer les extrema de $f_{|C}$ de deux façons :

— en paramétrant le cercle unité avec $\theta\mapsto(\cos(\theta),\sin(\theta))$

— avec le théorème sur les extrema liés.

Exercice 17 (Où l'on redémontre qu'une matrice symétrique réelle admet une v.p. réelle)**.** Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, muni de son p.s. can. et on considère $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto(Ax|x)$. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

a) Justifier que $f_{|S}$ admet un max. et un min.

b) A l'aide de la caractérisation différentielle des extrema locaux de $f_{|S}$, démontrer qu'il existe un $x\in S$ tel que Ax et x soient colinéaires, i.e. que A admet une v.p. réelle.

Exercice 18. a) Rappeler la définition de $\cos(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \cos(x+iy)$. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles $\cos, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \sin$ d'une variable réelle, puis en déduire une expression simple de $g(x,y) = |f(x,y)|^2$

c) Etudier les extrema de $|f|$ sur la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$.

Indication (méthode générale) Sur la boule ouverte, on sait faire ... sur le bord, on paramètrera par la variable x.

Détermination d'hyperplans tangents

Exercice 19 (Cas d'une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Soit $X = \{(x,y,z) \in U \times \mathbb{R},\ z = f(x,y)\}$. Déterminer $T_m X$ pour tout $m \in X$ de deux façons différentes :

a) A l'aide du théorème du cours pour les hyperplans tangents à une hypersurface en un point régulier,

b) Sans ce théorème, seulement avec la définition de $T_m X$.

N.B. L'intérêt du b) est bien sûr qu'on a n'a pas démontré le théorème invoqué au a) (seulement une des deux inclusions). Le fait de pouvoir la démontrer l'inclusion difficile « à la main » dans ce cas au b) fait sentir ce dont on aurait besoin dans le cas général et qui s'appelle le théorème de la fonction implicite.

Exercice 20 (Mines)**.**

a) Montrer que $T_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) \subset A_n(\mathbb{R})$ où on note $A_n(\mathbb{R})$ l'e.v. des matrices orthogonales.

b) Montrer l'inclusion réciproque en considérant, pour chaque $A \in M_n(\mathbb{R})$ la courbe $c : t \mapsto \exp(tA)$.

E.D.P.

Exercice 21. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante d'inconnue $f :]0;+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires,

$$(E) : \quad -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y + f(x,y)$$

Exercice 22 (Se ramène par changement de var. à l'équation des ondes)**.** *On suppose connue la forme générale des solutions à l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^2$ cf cours de maths et de physique !.*

Soit $U = (\mathbb{R}^{*+})^2$. Trouver toutes les applications $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\,(x,y) \in U,\ \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{x^3}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y^3}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

à l'aide du changement de variable $u = x^2$, $v = y^2$.

Fonctions harmoniques

Exercice 23 (Principe du maximum pour les fonctions harmoniques)**.** Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{B}$ la boule unité fermée. Soit S la sphère unité. Soit $f \in \mathcal{C}(\bar{B},\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur la boule ouverte B.

a) On suppose que $f_{|S} \leq 0$ et qu'il existe un $x_0 \in B$ tel que $f(x_0) > 0$. On veut montrer qu'il existe un $x_1 \in B$ tel que $\Delta f(x_1) < 0$.

   i) Pourquoi est-il clair qu'en tout cas il existe un x_1 tel que $\Delta f(x_1) \leq 0$.

   ii) On considère pour $\varepsilon > 0$ la fonction $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ Comparer Δf_ε et Δf.

   iii) En déduire qu'il existe un x_2 tel que $\Delta f(x_2) < 0$.

b) On suppose maintenant que f est une fonction harmonique i.e. vérifiant $\Delta f = 0$ sur B.
Montrer que $\min\limits_{\bar{B}} f = \min\limits_{S} f$ et $\max\limits_{\bar{B}} f = \max\limits_{S} f$

Exercice 24 (Propriété de la moyenne des fonctions harmoniques)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.

On suppose que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$

a) Montrer l'existence de $g \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) Pour $r \geqslant 0$, on pose $\varphi(r) := \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, puis calculer φ'. Interpréter le résultat obtenu.
Remarque : Si on connaît l'expression du Laplacien en coordonnées polaires, on peut aussi faire le b) plus directement.