Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{D}(I, M_n(\mathbb{R}))$, $t \mapsto A(t)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\forall\, t \in I,\ f_k(t) = \mathrm{Tr}(A^k(t)).$$

Justifier que f_k est dérivable sur I et calculer f_k'.

Exercice 2. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soient f, g, h des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]a,b[$. Montrer : $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A\ : I \to M_n(\mathbb{K})$ une fonction dérivable.

a) Justifier que $t \mapsto \det(A(t))$ est dérivable.

b) On suppose de plus que pour tout $t \in I$, $\det(A(t)) \neq 0$. En déduire que $t \mapsto A^{-1}(t)$ est dérivable.

c) En déduire alors que pour tout $t \in I$

$$(A^{-1})'(t) = -A(t)^{-1}.A'(t).A(t)^{-1}$$

Exercice 4 (Dém. de l'I.A.F. avec hypothèse minimale de régularité, dans le cadre euclidien)**.** a) QdC : quel est le cadre du programme pour l'I.A.F. pour une fonction à valeurs vectorielles ?

b) Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{C}([a,b], E)$ telle que $f \in \mathcal{D}(]a,b[, E)$.

Démontrer qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|.$$

Pour cela, on pourra appliquer le T.A.F. à la fonction réelle $g\ : t \mapsto (f(t)|f(b) - f(a)) \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien et $v \in E \setminus \{0\}$. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, E)$ telles que $(f'|v)$ soit une fonction *constante*.
Indication – On pourra caractériser ces f à l'aide de leurs composantes dans une b.o.n. de E bien choisie.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme et $f\ : [a,b] \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

Montrer que $\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|$

Exercice 7. Soit $(E, \|\ \|)$ un e.v.n. de dim. finie et $f \in \mathcal{C}^2([0,1], E)$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0_E$ et $\|f(1)\| = 1$.

Montrer que $\sup_{t\in[0,1]} \|f''\| \geq 4$.