MP 2 **Mardi 28 mars 2023**

Devoir surveillé 6 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques ne sont pas autorisés.

N.B. *les trois parties du problèmes peuvent être abordées indépendamment même si elles sont en fait très liées. La fin de la partie I est sûrement plus difficile que la partie II notamment. Il est conseillé de lire tout l'énoncé...*

Partie I : transformée de Legendre d'une fonction d'une variable réelle

Q0) Exemple introductif : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

a) Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé et $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto px - f(x) = px - x^2$. Montrer que φ_p admet un maximum sur $\mathbb{R}$, atteint en un unique point x_p. Calculer aussi $\varphi_p(x_p) = \max_{\mathbb{R}} \varphi_p$. Dans la suite, on notera $g(p) = \varphi_p(x_p)$.

b) Dessiner, pour $p = 1$, le graphe Γ_f de f, la droite Δ_p d'équation $y = px = x$, le point $(x_1, f(x_1))$: comment définir géométriquement ce point par rapport au graphe de f et à la droite Δ_p ? Que représente $\varphi_p(x_p)$ géométriquement ? Justifier que la tangente à Γ_f au point d'abscisse x_p est parallèle à Δ_p.

Définition – Dans toute cette partie **I**, on note I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, définie sur I. On note $J(f)$ l'ensemble des réels p tels que la fonction φ_p définie sur I par $x \mapsto (px - f(x))$ soit majorée.

Si $J(f) \neq \varnothing$, on définit la fonction g sur $J(f)$ par :

$$\forall p \in J(f), \quad g(p) = \sup_{x \in I}(px - f(x)).$$

La fonction g est appelée la transformée de Legendre de f et on note $g = L(f)$.

Q1) Exemples :

a) Montrer que pour $I = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto kx^2$ où $(k \in \mathbb{R}_+^*)$, la transformée de Legendre est définie sur $J(f) = \mathbb{R}$ et donner son expression. En déduire un exemple d'une fonction f telle que $L(f) = f$.

b) Soit $I = \mathbb{R}$ et $\forall\, x \in I,\ f(x) = e^x$. Montrer que $J(f) = [0, +\infty[$ (on ne demande pas d'expliciter $g = L(f)$ ici).

c) Soit $I = \mathbb{R}$ et $\forall\, x \in I, f(x) = \arctan(x)$. Montrer que $J(f)$ est un singleton.

Q2) Etude générale : Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On suppose que $J(f)$ est non vide.

a) Montrer que $J(f)$ est un intervalle : on montrera que, si a et b sont dans $J(f)$, alors pour tout $t \in [0,1], ta + (1-t)b$ appartient à $J(f)$.

b) Montrer que $g = L(f)$ est convexe sur $J(f)$.

c) (i) Montrer que si $I \subset \mathbb{R}^+$ alors g est croissante sur $J(f)$.
(ii) Que dire si $I \subset \mathbb{R}^-$?

Q3) Étude dans le cas particulier où f est $\mathcal{C}^2$ strictement convexe :
Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle I, telle que : $\forall x \in I, f''(x) > 0$.

a) Justifier que $f'(I)$ est un intervalle et que $f' : I \to f'(I)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ dont la fonction réciproque est $\mathcal{C}^1$. On note $\alpha \le \beta$ les extrémités de $f'(I)$ et on suppose $\alpha < \beta$. On peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$.

b) (i) Soit $p \in]\alpha, \beta[$. Justifier qu'il existe un unique $x_p \in I$ tel que $\varphi_p'(x_p) = 0$.
(ii) Montrer que $J(f)$ contient l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ et
(iii) donner l'expression de g sur $]\alpha, \beta[$ en fonction de f et $(f')^{[-1]}$ (fonction réciproque de la fonction f').

c) Montrer que, $\forall p \in]\alpha, \beta[$, la droite D_p d'équation $y = px - g(p)$ est tangente au graphe de la fonction f.

d) Une première propriété de « réciprocité » (cf. Q4)
En remarquant que la fonction $p \in]\alpha, \beta[\mapsto x_p$ est dérivable, montrer que $g'(p) = x_p$ pour tout $p \in]\alpha, \beta[$.

Q4) Involutivité de L en restriction à un ensemble de fonctions strictement convexes
Soit

$$H = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) > 0 \right) \quad \text{et} \quad f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que :

a) Montrer que pour tout $f \in H$, $g = L(f)$ est encore un élément de H.

b) $\forall f \in H, L(L(f)) = f$.

c) L est une bijection de H sur H.

Partie II : Généralisation aux fonctions de plusieurs variables, cas quadratique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E désigne l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Ainsi, si X (respectivement Y) est le vecteur colonne associé à $x \in E$ (resp. $y \in E$) dans la base canonique alors $\langle x, y \rangle = X^\top . Y$.
Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $p \in E$, l'application φ_p de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_p : x \mapsto \langle p, x \rangle - f(x)$$

soit majorée.
On appelle alors la transformée de Legendre de f, notée $L(f)$, l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$L(f) : p \mapsto \sup_{x \in E} (\langle p, x \rangle - f(x)).$$

Dans la suite de cette partie II, f est définie par $\forall\, x \in E,\ f(x) = \langle u(x), x \rangle$ où u est un endomorphisme autoadjoint dont les valeurs propres sont strictement positives.
En notant $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de E, on écrira aussi $f(x) = X^\top A X$
On écrira donc

$$\varphi_p(x) = \langle p, x \rangle - \langle u(x), x \rangle = P^\top X - X^\top A X$$

où P est le vecteur colonne associé à p dans la base canonique.

Q5) Soit $p \in E$ fixé.

a) Démontrer qu'il existe une base $B = (e_i)_{1 \le i \le n}$ de E telle que, pour tout $x \in E$:

$$\text{si } \ x = \sum_{i=1}^n y_i e_i, \text{ alors } \ \varphi_p(x) = \sum_{i=1}^n \left(q_i y_i - \lambda_i y_i^2 \right)$$

où les q_i et les λ_i sont des réels à déterminer.

b) Montrer que la fonction φ_p est majorée sur E et atteint sa borne supérieure. On précisera pour quel point x_p ce maximum est atteint.

On en déduit en particulier que la transformée de Legendre de f est bien définie.

Q6) a) Calculer $g = L(f)$, la transformée de Legendre de f et montrer qu'il existe une matrice carrée réelle symétrique B, d'ordre n, qu'on exprimera en fonction de A telle que

$$\forall p \in E, g(p) = P^\top B P$$

où P est le vecteur colonne associé à p.

b) Calculer la fonction $h = L(L(f))$.

Q7) Une autre méthode pour calculer x_p :

a) Soit $p \in E$. Calculer le gradient $\nabla \varphi_p(x)$ en tout point $x \in E$.

b) Déterminer les points critiques de φ_p.

c) En déduire une expression de x_p en fonction de A et P. Comparer au résultat de la question 5b).

III Problème d'optimisation

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Soit p un vecteur donné de E, $u \in \mathcal{S}^+(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif de E et A la matrice de u dans la base canonique de E, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Pour simplifier les notations, on note ici F pour l'application notée φ_p dans les autres parties c'est-à-dire que F est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in E,\ F(x) = \langle p, x\rangle - \langle u(x), x\rangle = P^\top X - X^\top AX$$

Soit C une partie fermée, non vide, convexe, de E. Lorsque F est majorée sur C, on s'intéresse à l'ensemble M- éventuellement vide - des points de C où l'application F restreinte à C atteint sa borne supérieure :

$$M = \left\{x \in C \mid F(x) = \sup_{y\in C} F(y)\right\}.$$

Q8) Convexité de M

a) Soit x_1 et x_2 deux points de C et pour $t \in [0,1]$, $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Montrer que

$$F(x) = (1-t)F(x_2) + tF(x_1) + t(1-t)(X_1 - X_2)^\top . A(X_1 - X_2)$$

b) On suppose M non vide. Montrer que M est un ensemble convexe.

Q9) Cas particulier où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ Dans cette seule question 9, on suppose de plus que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Démontrer qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ X^\top AX \geq k.X^\top X.$$

b) Montrer que M est non vide.

c) Montrer que M ne contient qu'un élément.

Q10) Une caractérisation des points de M :

a) Avec les mêmes notations qu'à la Q8), montrer que :

$$F(x) - F(x_2) = -t^2.(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) + t.(P - 2AX_2)^\top (X_1 - X_2).$$

b) Montrer l'équivalence :

$$x \in M \Leftrightarrow \big(x \in C \text{ et } \forall y \in C, (P - 2AX)^\top.(Y - X) \leq 0\big).$$

c) Interpréter la caractérisation trouvée au b) au moyen du gradient de F au point x.

Q11) Cas où C est borné : Dans cette question, on suppose de plus que l'ensemble C est borné, contenu dans la boule fermée de centre O et rayon R.

a) (i) Démontrer que M est non vide.

(ii) Trouver un exemple avec F non identiquement nulle où M a une infinité d'éléments.

b) Démontrer qu'il existe un réel α tel que : $\forall x \in E, \quad \|AX\| \leq \alpha\|X\|$.

c) Soit r un nombre réel strictement positif tel que :

$$r > \max\left\{6\alpha R^2, 2R(\|p\| + 2\alpha R)\right\}$$

(où α est défini au b)).

On se propose de construire par récurrence des suites $(u_m), (v_m)$ de points de C et une suite réelle (t_m) telles que si U_m (resp. V_m) est le vecteur colonne associé à u_m (resp. v_m), on a pour tout $m \in \mathbb{N}$:

(C1) $\forall x \in C, (2AU_m - P)^\top V_m \leq (2AU_m - P)^\top X$;

(C2) $t_m = \frac{1}{r}(P - 2AU_m)^\top (V_m - U_m)$;

(C3) $u_{m+1} = u_m + t_m(v_m - u_m)$.

On suppose donné $m \in \mathbb{N}$ et $u_m \in C$.

(i) Montrer l'existence de $v_m \in C$ vérifiant la relation (C1).

(ii) Montrer que t_m défini par la relation (C2) est dans l'intervalle $[0,1]$.

(iii) Montrer que u_{m+1} défini par la relation (C3) est dans C.

(iv) Déduire des questions (i), (ii) et (iii) que pour tout $u_0 \in C$, les relations (C1), (C2) et (C3) permettent de définir les suites $(u_m), (v_m)$ et (t_m).

d) (i) Montrer que, si (u_m) est la suite définie à la question c), la suite $(F(u_m))$ est croissante et convergente.

(ii) Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite (u_m) qui converge vers un élément de M et donc $(F(u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup_C F$.