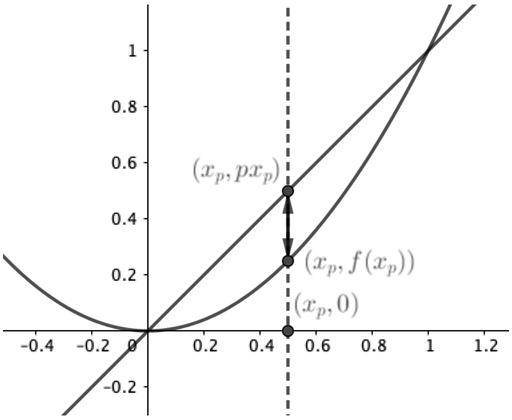
MP 2 **Mardi 28 mars 2023**

Devoir surveillé 6, d'après Centrale PC 2000, solutions

Q0) a) On calcule $\varphi_p'(x) = p - 2x$, pour en déduire qu'en prenant $x_p = p/2$ la fonction φ_p est croissante sur $]-\infty, x_p]$ et décroissante sur $[x_p, +\infty[$ donc admet un maximum en x_p et $\varphi_p(x_p) = p^2/2 - p^2/4 = p^2/4$
b) Géométriquement, le point $(x_p, f(x_p)) \in \Gamma_f$ est le point maximisant la distance verticale entre la droite d'équation $y = px$ et le graphe de f mais attention cette distance ayant le signe de $px - f(x)$ (dans la partie à droite du point $(1,1)$, $px - fx$ devient négatif donc ne compte pas ici pour le max.



Pour la tangente au point d'abscisse x_p. On peut bien sûr tout calculer dans ce cas particulier mais le résultat est général : comme $\varphi'(x_p) = 0$, on a $p - f'(x_p) = 0$ donc $f'(x_p) = p$ ce qui montre bien que la tangente (de pente $f'(x_p)$) a pour pente p comme Δ_p.

Q1) a) Avec le même calcul qu'à la Q0), pour tout $p \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(x) = p - 2kx$, s'annule en $x_p = p/(2k)$ et φ_p admet un max. en x_p qui vaut donc $g(p) = \dfrac{p^2}{2k} - k\dfrac{p^2}{(2k)^2} = \dfrac{p^2}{4k}$ et cela pour tout $p \in \mathbb{R}$ donc $J(f) = \mathbb{R}$.
Si on prend $k = 1/4$, on a $g\ : p \to p^2$ donc $L(f) = f$.
b) Pour $\varphi_p(x) = px - e^x$, on a $\varphi_p'(x) = p - e^x$.
• Si $p < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} px - e^x = +\infty$, donc φ_p n'est pas majorée et $p \notin J(f)$.
• Si $p = 0$, $\varphi_p(x) = -e^x$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = 0$ donc φ_p est majorée par 0 donc $0 \in J(f)$.
• Si $p > 0$, $\varphi_p(x) = px - e^x$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,$\varphi_p'(x) = p - e^x$ donc φ_p' s'annule au point $x_p = \ln(p)$, et φ_p est croissante sur $]-\infty, \ln(p)]$ puis décroissante sur $[\ln(p), +\infty[$.
Donc φ_p est majorée, (atteint un max. en x_p) donc $p \in J(f)$.
On a bien montré que $J_p = [0, +\infty[$.
c) Cette fois $\varphi_p(x) = px - \arctan(x)$.
• Si $p = 0$, $\varphi_p(x) = -\arctan(x)$ est majorée par $\pi/2$ donc $0 \in J(f)$.
• Si $p > 0$, $\varphi_p(x) = px - \arctan(x) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc φ_p n'est pas majorée et $p \notin J(f)$.
• De même si $p < 0$ par imparité, $p \notin J(f)$.
Donc ici $J(f) = \{0\}$.

Q2) a) Soient a et b deux éléments de $J(f)$ et $t \in [0,1]$ alors, pour tout x de I, on écrit

$$\begin{aligned} ax - f(x) &\leq g(a) \\ bx - f(x) &\leq g(b) \end{aligned}$$

En multipliant la première inégalité par t et la seconde par $(1-t)$ et en additionnant ces inégalités, on obtient

$$\forall\, x \in I, \quad [ta + (1-t)b]x - f(x) \leq tg(a) + (1-t)g(b) \tag{1}$$

ce qui signifie que $x \mapsto [ta + (1-t)b]x - f(x)$ est majoré sur I et donc que $ta + (1-t)b \in J(f)$ et en conclusion $J(f)$ est bien un intervalle.

b) Grâce à l'inégalité (1), et la déf. du sup. plus petits des majorants, on obtient :

$$g(ta+(1-t)b) \leq tg(a)+(1-t)g(b)$$

ce qui permet de dire que g est convexe.
c) (i) Soient $a<b$ dans $J(f)$. Pour tout $x \in I$, comme $x>0$ on sait que $ax \leq bx$ donc

$$\forall\, x \in I,\ ax-f(x) \leq bx-f(x).$$

Par passage à la borne supérieure (qui existe puisque $a,b \in J(f)$) on a

$$g(a) \leq g(b)$$

donc g est croissante (au sens large). (ii) De même on prouve ici que g est décroissante.

Q3) a) (i) Comme $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$, en particulier $f' \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et par T.V.I. comme I est un intervalle, $f'(I)$ est aussi un intervalle.
(ii) Comme $(f')'$ est strictement positive sur I, on sait que f' est strictement croissante sur I et donc injective, donc f' réalise bien une bijection de I sur son image $f'(I)$.
En outre comme $(f')'$ ne s'annule pas que que f' est $\mathcal{C}^1$ sur I, on sait par théorème de dérivabilité d'une réciproque que $(f')^{-1}$ est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $f'(I)$.
b) (i) Soit $p \in]\alpha,\beta[$. Comme $\varphi_p'(x)=p-f'(x)$, et f' est stmt croissante, on en déduit que φ_p' est stmt décroissante, et comme elle est continue, et que $\varphi_p'(\alpha)=p-\alpha>0$ et $\varphi_p'(\beta)=p-\beta<0$, on conclut par T.V.I. et stricte monotonie, qu'il existe un unique $x_p \in]\alpha,\beta[$ tel que $\varphi_p'(x_p)=0$.
(ii) Soit $p \in]\alpha,\beta[$. Avec le (i), on sait que φ_p' (qui est décroissante), est positive sur $]\alpha,x_p[$ et négative sur $]x_p,\beta[$.
On en déduit les variations de φ_p : croissante sur $[\alpha,x_p]\cap I$ et décroissante sur $[x_p,\beta]\cap I$.
Comme l'ensemble de définition I de f est inclus dans $[\alpha,\beta]$, on sait que φ_p est majorée, sur I par $\varphi_p(x_p)$.
Donc $p \in J(f)$.
On vient bien de montrer que $\boxed{]\alpha,\beta[\subset J(f)}$.
(iii) Par déf. puisque le sup. est un max., on sait que $g(p)=\varphi_p(x_p)=px_p-f(x_p)$.
Or x_p vérifie $\varphi_p'(x_p)=0$ i.e. $p-f'(x_p)=0$ donc $x_p=(f')^{-1}(p)$. Ainsi :

$$\boxed{g(p)=p(f')^{-1}(p)-f((f')^{-1}(p)).}$$

c) On l'a presque déjà fait à la Q0). Comme $\varphi'(x_p)=0$ et que $\varphi'(x)=p-f'(x)$ on a bien

$$f'(x_p)=p \tag{2}$$

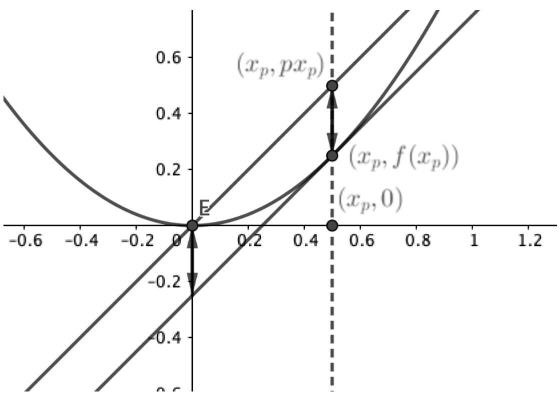
Or la tangente à Γ_f au point d'abscisse x_p est la droite d'équation :

$$y=f'(x_p)(x-x_p)+f(x_p),$$

donc avec (2) et la définition de $g(p)=px_p-f(x_p)$, cette équation devient :

$$\boxed{y=p(x-x_p)+px_p-g(p)=px-g(p).}$$

Cette propriété qui dit que $-g(p)$ est l'ordonnée à l'origine de l'unique tangente à Γ_f de pente p se voit bien sur la figure du 0) complétée comme suit :



d) (i) On a vu que $f'(x_p) = p$ donc que $x_p = (f')^{-1}(p)$.
Comme on a déjà dit que f' est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme on sait que $p \mapsto (f')^{-1}(p)$ est dérivable et par formule sur la dérivée d"une réciproque, de dérivée $\dfrac{1}{f''((f')^{-1}(p))} = \dfrac{1}{f''(x_p)}$.
Mais alors comme $g : \ p \mapsto px_p - f(x_p)$ par opération sur les fonctions dérivable, on a pour tout $p \in]\alpha, \beta[$,

$$g'(p) = x_p + \frac{p}{f''(x_p)} - \frac{1}{f''(x_p)} f'(x_p) = x_p + \frac{p}{f''(x_p)} - \frac{p}{f''(x_p)}$$

Donc

$$\boxed{g'(p) = x_p}$$

Remarque : ceci est déjà une formule de réciprocité puisqu'elle s'occupe des tangentes au graphe de g et donc va donner des informations sur $L(g)$ i.e. $L(L(f))$.

Q4) a) Soit $f \in H$, montrons que $g = L(f)$ est un élément de H.
Comme $f \in H$, on sait que $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc que $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$. Or on a vu (Q3) b)) que $J(f)$ contient $]\alpha, \beta[$, donc ici on sait déjà que $\boxed{J(f) = \mathbb{R}}$.
Ainsi g est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{R}$, $g'(p) = x_p$ par (Q3) d). Or $x_p = (f')^{-1}(p)$.
Par Q3) a) on sait que $(f')^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$ donc $g' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc $\boxed{g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1)}$.
En outre on a vu Q3) d) (i) que $g' : p \mapsto x_p = (f')^{-1}(p)$ admet pour dérivée $1/f''(x_p) > 0$, donc ici on sait que :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{R}, g''(p) > 0 \quad (2)}$$

Enfin pour $f \in H$, on a visiblement f' stmt croissante sur $\mathbb{R}$ et surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc bijective donc sa réciproque g' est aussi une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en particulier $\boxed{g'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \quad (3)}$
Avec (1), (2) et (3), on a bien montré que $g \in H$.
b) Soit $f \in H$. Comme f est convexe, on sait que son graphe est au-dessus de ses tangentes en tout point.
Or on a vu Q3) c) que la droite d'équation $y = px - g(p)$ est tangente au graphe de f, pour tout $p \in]\alpha, \beta[$.
Donc ici, pour tout $p \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$px - g(p) \leq f(x)$$

Donc :

$$\sup_{p \in \mathbb{R}} (px - g(p)) \leq f(x) \quad (*)$$

Mais mieux : pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a un $p \in \mathbb{R}$ tel que $x = x_p$ c'est $p = f'(x)$.
Pour ce $p \in \mathbb{R}$, on a $px - g(p) = f(x)$ (point de tangence) donc dans $(*)$ le sup. est atteint en $p = f'(x)$ est vaut $f(x)$.
donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \sup_{p \in \mathbb{R}} (px - g(p)) = f(x).$$

autrement dit

$$\boxed{L(g) = f \text{ i.e. } L(L(f)) = f}$$

c) On a montré au b) que pour tout $f \in H$, $L \circ L(f) = f$ donc $L \circ L = \mathrm{id}$ sur H.
Donc L est une bijection de H dans lui-même de réciproque $L^{-1} = L$. □

Partie II

N.B. On notera $(x|y)$ le produit scalaire écrit $\langle x, y \rangle$ dans l'énoncé.

Q5) a) Par théorème spectral, on sait que u est diagonalisable dans une b.o.n. On fixe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une telle b.o.n. de diagonalisation de u. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et pour tout $x \in E$, en écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a $u(x) = \sum_{i=1} \lambda_i y_i e_i$ et

$$(u(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

D'autre part, en notant $p = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i$ l'écriture de p dans la base $\mathcal{B}$, comme $\mathcal{B}$ est une b.o.n. on sait que $(p|x) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i$ et on conclut bien que

$$\varphi_p(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i y_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

ce qui donne l'écriture demandée en rassemblant les sommes.
b) On se sert alors du résultat de la Q1 a) ; chaque fonction $f_i(y_i) = q_i - \lambda_i y_i^2$ est majorée par $\frac{q_i^2}{4\lambda_i}$ (les λ_i sont > 0) et le maximum est atteint pour $y_i = \frac{q_i}{2\lambda_i}$ donc φ_p est majorée par

$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{4\lambda_i}$$

et cette valeur est atteinte pour $x_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\lambda_i} e_i$.

Q6) Par déf. $g(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_p(x)$. On vient donc de voir que

$$g(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{4\lambda_i} \quad (\dagger)$$

Or pour tout $i = 1, \ldots, n$, $u^{-1}(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i$.

Donc le même calcul qu'à la Q5) a), avec $p = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i$ dit que :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{\lambda_i} = (u^{-1}x|x) = P^\top.A^{-1}P$$

Donc, matriciellement l'égalité ($\dagger$) devient :

$$g(p) = \frac{1}{4} P^\top A^{-1} P = P^\top B P$$

en posant ;

$$\boxed{B = \tfrac{1}{4}A^{-1}.}$$

Remarque : cette formule généralise le résultat de la Q0) et de la Q1) a) où nous avions bien trouvé $g(p) = kp^2/4$ pour $f(x) = kx^2$. Ici k est remplacé par A.
b) D'après le a), pour $h = L(g)$, et tout $x \in E$, on a $h(x) = X^\top C X$ où $C = \frac{1}{4}B^{-1}$.
Or comme $B = \frac{1}{4}A^{-1}$, on a $B^{-1} = 4A$ et donc $C = \frac{1}{4}(4A) = A$.
Donc $h(x) = X^\top A X = f(x)$. Ainsi :

$$\boxed{h = f \text{ i.e. } L(L(f)) = f}$$

ce qui généralise (dans ce cas particulier des fonctions quadratiques) le résultat de la Q4.

Q7) a) Par déf. $\varphi_p(x) = (p|x) - (u(x)|x)$.
Donc $\varphi_p(x+h) = (p|x) + (p|h) - (u(x) + u(h)|x + h)$.
Or $(u(x) + u(h)|x + h) = (u(x)|x) + (u(h)|x) + (u(x)|h) + (u(h)|h)$.
Et $|(u(h)|h)| \leq ||u(h)||.||h||$ par I.C.Schwarz et $||u(h)|| \leq |||u|||.||h||$ par déf. de la norme d'opérateur.
Donc $|(u(h)|h)| = O(||h||^2)$ pour $h \to 0$.
On obtient donc le DL$_1$ suivant ;

$$\varphi_p(x+h) = \varphi_p(x) + (p|h) - (u(x)|h) - (u(h)|x) + o(||h||)$$

où le terme central $h \mapsto (p|h) - (u(x)|h) - (u(h)|x)$ est linéaire en h et est donc $d\varphi_p(x)$.
Mais comme $u^* = u$, on peut le réécrire $d\varphi_p(x).h = (p|h) - 2(u(x)|h)$.
et donc

$$\boxed{\nabla\varphi_p(x) = p - 2u(x) = P - 2AX.}$$

b) Les points critiques $x \in E$ pour φ_p sont par déf. les points où $\nabla\varphi_p(x) = 0$ c'est-à-dire ;

$$P = 2AX$$

Comme A est inversible (toutes ses v.p. sont non nulles), cette condition équivaut à l'unique solution :

$$\boxed{X = \frac{1}{2}A^{-1}P.}$$

c) Comme on a vu au 5) a) que φ_p avait bien un maximum sur E, le ou les points où ce max. est atteint doivent être critique(s).
Or on a trouvé au b) un unique point critique ! Donc c'est le (seul) point où le max. est atteint :

$$x_p = \frac{1}{2}A^{-1}P$$

ce qui correspond bien à l'écriture en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de dz de u donnée à la fin de la Q5) b).

Q8) a) Calcul sans grâce particulière :

$$\begin{aligned}
F(tx_1 + (1-t)x_2) =& P^\top (tX_1 + (1-t)X_2) - (tX_1 + (1-t)X_2)^\top A(tX_1 + (1-t)X_2) \\
=& \, tP^\top X_1 + (1-t)P^\top X_2 - t^2 \cdot X_1^\top AX_1 - t(1-t)\cdot X_1^\top AX_2 \\
& - t(1-t)\cdot X_2^\top AX_1 + (1-t)^2 \cdot X_2^\top AX_2 \\
=& tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t)\cdot X_1^\top AX_1 - t(1-t)\cdot X_1^\top AX_2 \\
& + t(1-t)\cdot X_2^\top AX_2 - t(1-t)\cdot X_2^\top AX_1 \\
=& tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t)X_1^\top A(X_1 - X_2) + t(1-t)\cdot X_2^\top A(X_2 - X_1) \\
=& tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t)\cdot (X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2)
\end{aligned}$$

b) (i) Le calcul permet en fait de montrer que :

$$\boxed{F \text{ est } \textit{concave}}$$

(sur la planche, on l'a fait autrement en diagonalisant A c'est plus joli).
En effet, soit $(x_1, x_2) \in C^2$, on sait que $(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) \geq 0$ car la matrice A est symétrique positive, donc avec le a), on a bien l'égalité définissant la concavité :

$$F(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tF(x_1) + (1-t)F(x_2)$$

(ii) On en déduit maintenant que M est un ensemble convexe.
Soit $x_1, x_2 \in M$, on a, en notant $S = \sup_{y\in C} F(y)$, $F(x_1) = F(x_2) = S$.
Par conséquent, pour tout $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $t \in [0,1]$ on a :

$$F(x) \geq tF(x_1) + (1-t)F(x_2) = (t + (1-t))S = S$$

Donc $F(x) = S$ puisque S est le max. de F et $x \in M$.
Finalement M est un ensemble convexe. Si M est vide, M est quand même convexe mais l'intérêt semble limité ici.

Q9) a) On sait que $X^\top AX = (u(x)|x)$.
On choisit une b.o.n. de diagonalisation de u qu'on note $(e_1, \ldots, e_n)$.
Si $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a vu que $(u(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.
On prend $k = \min\{\lambda_i, i \in [\![1,n]\!]\}$. On a alors bien pour tout $x \in E$

$$X^\top AX = (u(x)|x) \geq k\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|x\|^2 = X^\top X.$$

Rem. Autre méthode : dire qu'ici $X \mapsto \sqrt{X^\top AX}$ est une norme (euclidienne) et invoquer l'équivalence des normes en dim. finie.

b) Avec le a), on obtient : $\forall\, x \in E,\ F(x) \leq (p|x) - k\|x\|^2$.
Lorsque $\|x\| \to +\infty$ alors $F(x) \to -\infty$ et en conséquence :

$\boxed{\text{Argument standard pour la coercivité}}$

en prenant $x_0 \in C$ quelconque et en posant $D = \{x \in C \mid F(x) \geq F(x_0)\}$ alors D est borné. D est aussi fermé (image réciproque du fermé $[F(x_0), +\infty[$ par l'application continue F) donc (comme E est de dim. finie) D est compact donc la fonction continue F est borné sur D et atteint sa borne supérieure.

Conclusion : comme la borne supérieure de F sur D est égale à la borne supérieure de F sur C alors M est non vide.

c) La raison est la *stricte* concavité de F. Précisément, avec la relation de la Q8 a), comme ici A est définie positive, si $x_1 \neq x_2$ et $t \in]0,1[$, alors le terme : $t(1-t)(X_1 - X_2)^\top.A(X_1 - X_2)$ est strictement positif.

Si donc par l'absurde on avait $x_1 \neq x_2$ avec $F(x_1) = F(x_2) = S$ alors pour $x = tx_1 + (1-t)x_2$, on aurait $F(x) > tS + (1-t)S$ ce qui contredirait la maximalité de S.

Donc M est un singleton.

Q10) a) Dans le calcul suivant, on utilise essentiellement la symétrie de A qui donne que $X_1^\top AX_2 = X_2^\top AX_1$. On part de la formule trouvée au 8 a) en retranchant $F(x_2)$:

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_2) &= -tF(x_2) + tF(x_1) + \left(t - t^2\right).(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) \\
&= t\left(-P^\top X_2 + X_2^\top AX_2 + P^\top X_1 - X_1^\top AX_1\right) \\
&\quad + t.(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) - t^2.(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) \\
&= -t^2(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) \\
&\quad + t.[P^\top(X_1 - X_2) + X_2^\top AX_2 - X_2^\top AX_1 - \underbrace{X_1^\top AX_2}_{=X_2^\top AX_1} + X_2^\top AX_2] \\
&= -t^2.(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) + t.(P - 2AX_2)^\top(X_1 - X_2).
\end{aligned}$$

2. $(\Rightarrow)$ si $x_2 \in M$ alors, pour tout $x_1 \in C$, pour tout $t \in]0,1]$, on a

$$F(x) - F(x_2) = t\left[-t.(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) + (P - 2AX_2)^\top(X_1 - X_2)\right] \leq 0$$

soit, en simplifiant par $t > 0$,

$$-t.(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) + (P - 2AX_2)^\top(X_1 - X_2) \leq 0$$

et en prenant la limite lorsque $t \to 0$, on obtient :

$$(P - 2AX_2)^\top(X_1 - X_2) \leq 0$$

$(\Leftarrow)$ implication immédiate : il commence par prendre $t = 1$ donc $x = x_2$, dans l'égalité du a) qui devient :

$$F(x_2) - F(x_1) = -(X_1 - X_2)^\top A(X_1 - X_2) + (P - 2AX_2)^\top(X_1 - X_2).$$

On pose alors $Y = X_1$ et $X = X_2$ et on suppose que x vérifie pour tout $y \in C$, $(P - 2AX)^\top(Y - X) \leq 0$, alors

$$F(y) - F(x) = -(Y - X)^\top A(Y - X) + (P - 2AX)^\top(Y - X)$$

et dans le membre de droite de cette égalité le premier terme est négatif car $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et le second par hypothèse, donc

$$F(y) - F(x) \leq 0$$

et cela pour tout $y \in C$ donc $x \in M$.

c) On sait (cf. partie II Q 7a)) que $P - 2AX = \nabla F(x)$ donc la condition trouvée au b) s'écrit :

$$x \in M \Leftrightarrow \forall\, y \in C, (\nabla F(x)|(y - x)) \leq 0$$

Remarque : si x est un point intérieur à C alors l'ensemble des $(y - x)$ pour $y \in C$ contient une boule ouverte $B(0, \varepsilon)$ donc la condition devient par symétrie de la boule, $(\nabla F(x)|u) = 0$ pour tout $u \in B(0, \varepsilon)$ et finalement équivaut à $\nabla F(x) = 0$ la condition nécessaire *point critique* habituelle pour un point intérieur, qui est ici aussi suffisante par concavité de F.

On peut donc traduire la condition comme suit :

$$\forall\, x \in C,\ x \in M \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla F(x) = 0 & \text{si } x \in \mathring{C}, \\ \forall\, y \in C,\ (\nabla F(x)|(y - x)) \leq 0, & \text{si } x \in \partial C. \end{cases}$$

Q11) a) (i) Ici C est fermé borné donc compact car $\mathbb{R}^n$ est un espace de dimension finie. F est continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

(ii) On peut prendre comme exemple $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_1^2$ sur $\mathbb{R}^2$ autrement dit $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On considère F sur le carré $C = [0,1]^2$.

Alors F est maximale en x ssi $x_1 = 1/2$ donc $M = \{1/2\} \times [0,1]$ contient une infinité d'éléments.

b) Immédiat en utilisant la continuité des applications linéaires en dimension finie.

c) **Culturel :** $\boxed{\text{La construction suivante s'appelle une } \textit{descente de gradient}}$

(i) $f : x \mapsto f(x) = (2AU_m - P)^\top X$ est une application continue, f atteint son minimum sur C compact pour un vecteur v_m donc ce vecteur v_m vérifie bien :

$$\forall x \in C, \quad (2AU_m - P)^\top V_m \leq (2AU_m - P)^\top X$$

(ii) On sait que $\|V_m - U_m\| \leq 2R$ et que

$$\begin{aligned} \|P - 2AU_m\| &\leq \|P\| + 2\|AU_m\| \\ &\leq \|P\| + 2\alpha\|U_m\| \leq \|P\| + 2\alpha R \end{aligned}$$

donc, grâce à Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} (P - 2AU_m)^\top (V_m - U_m) &\leq \|P - 2AU_m\| \cdot \|V_m - U_m\| \\ &\leq 2R(\|P\| + 2\alpha R) < r \end{aligned}$$

et par conséquent $t_m < 1$.

Enfin, grâce à l'inégalité du (i) en prenant $X = U_m$, on a $t_m \geq 0$. On a bien montré que $\boxed{t_m \in [0,1[}$

(iii) On écrit que $u_{m+1} = t_m v_m + (1 - t_m) u_m$, u_m et v_m étant dans l'ensemble convexe C alors $u_{m+1} \in C$.

(iv) Les suites $(u_m), (v_m)$ et (t_m) sont en effet définies (de manière non unique) par les relations i), ii) et iii). En effet, par récurrence, si on connaît u_m alors (C1) permet de "connaître" v_m, (C2) permet de calculer t_m et enfin (C3) permet de déterminer u_{m+1}. La connaissance de $u_0 \in C$ permet d'amorcer cette récurrence.

d) (i) On reprend la formule de la Q10 a) avec $X_2 = U_m, X_1 = V_m$ alors

$$X = t_m V_m + (1 - t_m) U_m = U_m + t_m (V_m - U_m) = U_{m+1}$$

d'où

$$F(u_{m+1}) - F(u_m) = -t_m^2 \cdot {}^t(V_m - U_m) A (V_m - U_m) + t_m \underbrace{t}_{=rt_m} \underbrace{t}_{} t_m^2 \left[r - {}^t(V_m - U_m) A (V_m - U_m)\right]$$

$$\text{Or } {}^t(V_m - U_m) A (V_m - U_m) \leq \|V_m - U_m\| \alpha \|V_m - U_m\| \leq 4\alpha R^2)$$

$$F(u_{m+1}) - F(u_m) \geq t_m^2 \left(r - 4\alpha R^2\right) \geq 0$$

donc la suite $(F(u_m))$ est croissante et majorée elle converge.

(ii) On a même un peu mieux, en effet $F(u_{m+1}) - F(u_m) \geq t_m^2 \left(r - 4\alpha R^2\right) \geq 2\alpha R^2 t_m^2$ donc $t_m \to 0$. Par Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (u_m, v_m) une suite convergente vers (u, v) dans C^2. En passant à l'inégalité dans la relation (C1) on obtient :

$$\forall x \in C, \quad {}^t(2AU - P)V \leq {}^t(2AU - P)X$$

Par ailleurs, on a $t_m = \frac{1}{r}.t^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m) \to 0$ donc

$${}^t(P - 2AU)(V - U) = 0$$

soit, en exploitant les deux derniers résultats

$$\forall x \in C, \quad {}^t(2AU - P)U \leq^t (2AU - P)X$$

et la caractérisation de la Q10 b) permet de conclure que $u \in M$.