

## D.M. 15 : Inégalités sur les dérivées intermédiaires...

### 1 Majoration des dérivées d'une fonction vectorielle

**Notation :** Dans cette partie I, on note  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. de dimension finie.

On rappelle qu'une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $E$  est bornée par un réel  $K > 0$  si la fonction  $\|\varphi\|$  est majorée par  $K$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|\varphi(x)\| \leq K$$

#### Préliminaire

**Q1)** Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre  $m$  à l'origine de la fonction  $(e^x - 1)^m$ , montrer que :

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} C_m^k k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est un entier entre } 1 \text{ et } m-1 \\ m! & \text{si } j = m \end{cases}$$

**Q2)** Prouver que si  $(u_k)$  est une suite croissante de réels strictement positifs et  $k, n$  des entiers tels que  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$(u_1 u_2 \dots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \dots u_n)^k.$$

#### Une première inégalité pour $M_1$ en fonction de $M_0$ et $M_2$

**Q3)** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  dans  $E$  telle que  $\|f\|$  et  $\|f''\|$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$  respectivement par  $M_0$  et  $M_2$ .

En écrivant, pour  $h > 0$ , l'inégalité de Taylor-Lagrange entre  $x$  et  $x+h$  et entre  $x$  et  $x-h$ , montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|f'(x)\| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

**Q5)** En déduire que  $\|f'\|$  est bornée par  $\sqrt{2M_0 M_2}$ .

#### Une première généralisation

**Q6)** Montrer de même que, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et de classe  $\mathcal{C}^3$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  dans  $E$ , telle que  $\|f\|$  et  $\|f^{(3)}\|$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$  respectivement par  $M_0$  et  $M_3$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|f'(x)\| \leq \frac{1}{2} (9M_0^2 M_3)^{1/3}$$

**Q7)**  $f''$  est-elle également bornée sur  $\mathbb{R}$  ?

#### Généralisation pour $n$ quelconque

Dans toute la suite du problème,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit  $f$  une fonction, non constante, de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et de classe  $\mathcal{C}^n$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  dans  $E$  telle que  $\|f\|$  et  $\|f^{(n)}\|$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$  respectivement par  $M_0$  et  $M_n$ .

**Q8)** En utilisant la question 1) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  appliquée à la fonction  $f$  entre les valeurs  $x$  et  $x+h$  pour  $h = 1, 2, \dots, n-1$ , montrer que la fonction  $f^{(n-1)}$  est, elle aussi, bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Q9)** En déduire que toutes les dérivées  $f^{(k)}$  sont bornées pour  $0 \leq k \leq n$ . On note alors  $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f^{(k)}(x)\|$

**Q10)** Montrer que pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on a  $M_k > 0$ .

**Q11)** En utilisant la suite finie  $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$  avec  $u_k = 2^{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}}$ , en déduire que pour tout entier  $k$  entre 0 et  $n$ , on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$$

**Q12)** Est-ce la meilleure majoration possible ?

## 2 Vers une amélioration de l'inégalité de la partie 1

**Cadre et notation :** pour simplifier on se place désormais dans le cadre des fonctions à valeurs réelles et on note maintenant  $E$  (respectivement  $F$ ) l'espace des fonctions continues par morceaux (respectivement continues) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(x+1) + f(x) = 0$  pour tout réel  $x$ . On admettra -c'est évident- que ce sont des sous-espaces vectoriels réels de l'espace de toutes les fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on munit de la norme de la convergence uniforme, notée ici  $N$  et définie par

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

**Q13)** Démontrer que pour toute fonction  $f$  dans  $E$ , il existe  $g$  unique dans  $F$  telle que, en tout point  $x$  où  $f$  est continue, on a  $g'(x) = f(x)$ . On note alors  $g = T(f)$  ou  $g = Tf$  et l'on définit ainsi une application  $T$  de  $E$  dans  $E$ .

**Q14)** On considère la fonction  $\varphi_0$  de  $E$  telle que :

$$\varphi_0(0) = 0, \varphi_0(x) = 1 \text{ si } x \in ]0, 1[$$

On pose  $T^1 = T$  et si  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $T^k = T \circ T^{k-1}$ , puis pour  $k \geq 1$ ,  $\varphi_k = T^k(\varphi_0)$ .

- Déterminer et représenter graphiquement sur le segment  $[0, 2]$  les fonctions  $\varphi_k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Dans toute la suite, on notera  $\lambda_k = N(\varphi_k)$ .
- Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1} \varphi_k(x) \text{ et } \varphi_k(1-x) = (-1)^k \varphi_k(x).$$

- Montrer que, pour  $k \geq 1$

$$\lambda_{2k} = (-1)^k \varphi_{2k}(1/2) \text{ et } \lambda_{2k-1} = (-1)^k \varphi_{2k-1}(0).$$

**Q15)** a) Soit  $f \in E$ . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2Tf(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$$

- En déduire que, pour tout  $f \in E$ , on a  $2N(Tf) \leq N(f)$ .

**Q16)** Déterminer les fonctions  $f$  de norme 1 de  $E$  telles que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}$$

**Q17)** Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f$  de norme 1 dans  $F$  telle que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}$$

**Q18)** Soit maintenant  $p$  un entier naturel non nul et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et de classe  $\mathcal{C}^n$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x+2p) = f(x)$  pour tout réel  $x$ .

- Montrer que si  $f$  a  $q$  zéros distincts sur  $[0, 2p[$ , alors  $f'$  a au moins  $q$  zéros distincts sur  $[0, 2p[$ .

b) Montrer que si  $f$  et  $f'$  ont exactement  $q$  zéros distincts sur  $[0, 2p[$ , alors elles n'ont aucun zéro commun.

**Q19)** Pour tout réel  $\nu$  tel que  $0 < \nu < 1$  et tout réel  $\rho$ , on définit la fonction  $\ell : x \mapsto \varphi_n(x) - \nu f(x + \rho)$ .

- a) On suppose que  $N(f^{(n)}) \leq 1$ . Montrer que  $\ell^{(n-1)}$  s'annule au plus  $2p$  fois sur  $[0, 2p[$ .  
 b) On suppose que  $N(f) \leq \lambda_n$ . Montrer que  $\ell$  s'annule au moins  $2p$  fois sur  $[0, 2p[$ .  
 c) En déduire que, si  $N(f) \leq \lambda_n$  et  $N(f^{(n)}) \leq 1$ , les  $\ell^{(k)}$  pour  $k = 1, 2, \dots, n-1$  ont exactement  $2p$  zéros sur l'intervalle  $[0, 2p[$ .

**Q20)** On suppose  $f$  non constante.

a) Montrer que l'on peut trouver  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $[0, 2p[$  tels que :

$$|f'(\alpha)| = N(f'), \varphi'_n(\beta) = \frac{\lambda_{n-1}}{N(f')} f'(\alpha)$$

On pose alors  $h(x) = \varphi_n(x) - \frac{\lambda_{n-1} f(x + \alpha - \beta)}{N(f')}$ .

- b) Ici on suppose  $n \geq 3$ . Vérifier que  $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$ .  
 c) En déduire que :

$$(N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1) \Rightarrow (N(f') \leq \lambda_{n-1})$$

d) Montrer que cette dernière implication est encore vraie pour  $n = 2$ .

**Q21)** Montrer qu'il existe une fonction  $\omega$  de classe  $\mathcal{C}^n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  valant 1 sur le segment  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et 0 en dehors du segment  $[-1, 1]$  (on pourra utiliser la fonction  $x \mapsto \int_0^x \sin^n(t) dt$  sur le segment  $[0, \pi]$ ).

**Q22)** Soit maintenant  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et de classe  $\mathcal{C}^n$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  et  $f^{(n)}$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$  et pour laquelle :

$$N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1$$

Soit  $\alpha$  un réel de l'intervalle  $[0, 1[$ . Pour tout entier naturel  $p$  non nul, on note  $f_p$  la fonction de période  $2p$  telle que :

$$f_p(x) = \alpha f(x) \omega(x/p) \text{ pour } |x| \leq p$$

a) Montrer que  $f_p^{(n)}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et que l'on a, pour  $p$  assez grand,

$$N(f_p) \leq \lambda_n \text{ et } N(f_p^{(n)}) \leq 1$$

b) En déduire que l'on a encore  $N(f') \leq \lambda_{n-1}$ .

**Q23)** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et de classe  $\mathcal{C}^n$  par morceaux de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  et  $f^{(n)}$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que, pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $f^{(k)}$  est bornée et que l'on a :

$$N(f^{(k)}) \leq N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{k/n} \frac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}.$$

(On pourra utiliser une fonction du type  $x \mapsto af(bx)$ .)

**Q24)** On définit, pour  $p$  entier supérieur ou égal à 2, la fonction  $\psi_p$  de  $F$ , affine sur  $[0, \frac{1}{p}]$ ,  $[\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}]$  et  $[1 - \frac{1}{p}, 1]$  et vérifiant :

$$\psi_p(0) = \psi_p(1) = 0, \psi_p\left(\frac{1}{p}\right) = \psi_p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1.$$

En utilisant la Q15 montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} N(T^n(\psi_p)) = \lambda_n$$

**Q25)** En déduire que l'inégalité de la Q23 ne peut être améliorée.