

Mines-Ponts PSI 2021

Mathématiques 1

un corrigé¹

Rq. Dans tout ce corrigé, on supposera, plus généralement et plus précisément que ce qui est fait dans l'énoncé, que l'on a :

$$X(\Omega) \subset \{x_n, n \in \mathbb{N}\},$$

où les x_n , pour $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts. Cela évite en particulier des cas par cas fastidieux dans les questions de cours, pour distinguer les cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Questions de cours

- Par définition, X est d'espérance finie si la série $\sum x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument.
• Par théorème de transfert appliqué à la fonction valeur absolue $|\cdot|$, on a alors :

$$\begin{aligned} |X| \text{ est d'espérance finie} &\iff \text{la série } \sum |x_n| \mathbf{P}(X = x_n) \text{ converge absolument} \\ &\iff \text{la série } \sum x_n \mathbf{P}(X = x_n) \text{ converge absolument} \\ &\iff X \text{ est d'espérance finie.} \end{aligned}$$

2. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbf{P}(|X| \leq M) = 1$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \mathbf{P}(X = x_n) \leq M \mathbf{P}(X = x_n),$$

c'est clair si $|x_n| \leq M$, et c'est encore vrai si $|x_n| > M$ car on a alors $\{X = x_n\} \subset \{|X| > M\}$, donc par croissance des probabilités, $0 \leq \mathbf{P}(X = x_n) \leq \mathbf{P}(|X| > M) = 1 - \mathbf{P}(|X| \leq M) = 0$, donc $\mathbf{P}(X = x_n) = 0$ (de sorte que l'inégalité voulue est $0 \leq 0$).

Or la série $\sum \mathbf{P}(X = x_n)$ converge, donc par comparaison de termes positifs, la série $\sum |x_n| \mathbf{P}(X = x_n)$ converge, i.e. X admet une espérance.

Généralités sur les variables aléatoires

3. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et que X vérifie (\mathcal{D}_α) où $\alpha > 0$.
 - La variable aléatoire $|X|$ est alors à valeurs dans \mathbb{N} , de sorte que si $|X|$ admet une espérance, alors la série $\sum \mathbf{P}(|X| \geq n)$ converge².
Or par \mathcal{D}_α , on a $\mathbf{P}(|X| \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$, et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de termes positifs, la série $\sum \mathbf{P}(|X| \geq n)$ diverge aussi.
Ainsi $|X|$ n'admet pas d'espérance, donc X non plus d'après la question 1.
 - On sait que si X^2 admet une espérance (i.e. si X admet une variance), alors X admet une espérance, donc par contraposée, X^2 n'admet pas d'espérance non plus.

4. On suppose que X est symétrique et que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire.

1. Merci aux corrigés précédemment mis à disposition, qui m'ont permis de simplifier certains passages !

2. C'est même une équivalence, et on a alors $\mathbf{E}(|X|) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n)$.

- Comme X est symétrique, X et $-X$ suivent la même loi, donc par le théorème 1 du préambule, $f(X)$ et $f(-X)$ suivent la même loi. Mais f est impaire, donc $f(-X) = -f(X)$.
Ainsi $f(X)$ et $-f(X)$ suivent la même loi, i.e. $f(X)$ est symétrique.
- Si $f(X)$ est d'espérance finie, alors puisque $-f(X)$ suit la même loi que $f(X)$, cette variable $-f(X)$ est aussi d'espérance finie et $\mathbf{E}(-f(X)) = \mathbf{E}(f(X))$.
Mais par linéarité de l'espérance, on a $\mathbf{E}(-f(X)) = -\mathbf{E}(f(X))$, donc $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5. On suppose X et Y symétriques et indépendantes. Posons $Z = (X, Y)$.

- On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z = (x, y)) &= \mathbf{P}(X = x, Y = y) \quad \text{par définition} \\
 &= \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
 &= \mathbf{P}(X = -x)\mathbf{P}(Y = -y) \quad \text{par symétrie de } X \text{ et } Y \\
 &= \mathbf{P}(X = -x, Y = -y) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
 &= \mathbf{P}(-X = x, -Y = y) \\
 &= \mathbf{P}(-Z = (x, y)) \quad \text{par définition.}
 \end{aligned}$$

Donc $Z = (X, Y)$ et $-Z = (-X, -Y)$ suivent la même loi (i.e. Z est symétrique si l'on ne restreint pas la définition 2 du préambule au cas des variables réelles).

- Par le théorème 1 du préambule appliqué aux variables Z et $-Z$ et à la fonction $u : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, on voit alors que $u(Z) = X + Y$ et $u(-Z) = -X - Y$ suivent la même loi, i.e. que la variable $X + Y$ est symétrique³.

Deux sommes de séries

6. Posons $\ell(u) = \frac{z}{1-uz}$, de sorte que $L(t) = \int_0^t \ell(u) du$.

- On a $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, donc pour tout $t \in [0; 1]$, $tz \neq 1$, puisque $|tz| < 1$ si $t \in [0; 1[$, et $tz = z$ si $t = 1$.
Ainsi la fonction $\ell : t \mapsto \frac{z}{1-tz}$ est bien définie sur $[0; 1]$, et elle y est alors de classe \mathcal{C}^∞ comme quotient de la fonction constante $t \mapsto z$ et de la fonction affine $t \mapsto 1 - tz$ qui le sont.
- La fonction $L : t \mapsto \int_0^t \ell(u) du$ est donc bien définie sur $[0; 1]$, et par le théorème fondamental du calcul intégral, c'est une primitive de ℓ sur $[0; 1]$. Comme ℓ est de classe \mathcal{C}^∞ , sa primitive L l'est aussi.
- Montrons par récurrence que⁴ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$ pour $t \in [0; 1]$.

★ On a $L' = \ell$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\forall t \in [0; 1]$, $L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$.

Alors en dérivant cette relation (avec la formule $(u^\alpha)'(t) = \alpha u'(t)u^{\alpha-1}(t)$), on obtient

$$\forall t \in [0; 1], \quad L^{(n+1)}(t) = \frac{(n-1)!z^n \times (-n) \times (-z)}{(1-tz)^{n+1}} = \frac{n!z^{n+1}}{(1-tz)^{n+1}},$$

qui est la formule voulue au rang $n + 1$.

★ On conclut par récurrence que l'on a bien, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0; 1]$, $L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$.

3. On pourrait avoir envie d'appliquer le 1er point de la question 4 ici, plutôt que se ramener à nouveau au théorème 1, mais on est dans un cadre différent : la variable Z n'est pas à valeurs dans \mathbb{R} et la fonction $u : (x, y) \mapsto x + y$ n'est pas définie sur \mathbb{R} .

4. On devine la formule en calculant les premières dérivées de $L' = \ell$ au brouillon.

7. Posons $x = \operatorname{Re}(z)$. Comme $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, on a $x \in [-1; 1[$. Soit $t \in]0; 1]$. Alors :

$$|1 - tz| \geq |\operatorname{Re}(1 - tz)| = |1 - tx| = 1 - tx > 1 - t$$

car $x < 1$ et $t > 0$ donc $tx < t \leq 1$, donc $1 - tx > 0$ et $1 - tx > 1 - t$. On a donc bien $|1 - tz| > 1 - t$.

8. • On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) où $f_n(t) = \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n$.

★ On montre que les fonctions f_n sont bien définies et continues sur $]0; 1]$ comme en question 6.

De plus par la question 7, on a $\forall t \in]0; 1]$, $\left| \frac{1-t}{1-tz} \right| < 1$, donc $f_n(t) = \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; 1]$.

★ Comme $\forall t \in]0; 1]$, $\left| \frac{1-t}{1-tz} \right| < 1$, on a encore $\forall t \in]0; 1]$, $|f_n(t)| = \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n \leq 1$, et la fonction φ constante égale à 1 est intégrable sur $]0; 1]$ (car cet intervalle est borné).

Donc le théorème de convergence dominée s'applique et montre que $\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 0 dt = 0$.

• On note que la fonction $t \mapsto \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}$ est bien définie et continue sur le segment $[0; 1]$ (comme en question 6), de sorte que son intégrale y est bien définie. De plus par croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1-tz|} \int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt.$$

Or $|z| \leq 1$ donc la suite $\left(\frac{|z|^{n+1}}{|1-tz|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et $\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par le point précédent, donc par encadrement :

$$\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

9. Comme la fonction L est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0; 1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'applique à tout ordre $N \in \mathbb{N}$ et donne :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad L(1) = \sum_{n=0}^N \frac{L^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} L^{(N+1)}(t) dt.$$

Or $L(0) = \int_0^0 \ell(u) du = 0$ et pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; 1]$, $L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$ (question 6), donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad L(1) = \sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n} + \int_0^1 \frac{(1-t)^N z^{N+1}}{(1-tz)^{N+1}} dt.$$

Par la question 8, cette dernière intégrale tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge et en passant à la limite :

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

10. • Les fonctions coordonnées $(t, u) \mapsto t$ et $(t, u) \mapsto u$ sont linéaires donc continues de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , donc par composition, la fonction $(t, u) \mapsto e^{it}$ est continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} .

Par produit, la fonction $(t, u) \mapsto ue^{it}$ est continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} , donc la fonction $(t, u) \mapsto 1 + ue^{it}$ aussi (par somme avec une fonction constante donc continue).

Enfin, le module $|\cdot|$ est continu de \mathbb{C} dans \mathbb{R} , donc par composition, la fonction $\gamma : (t, u) \mapsto |1 + ue^{it}|$ est continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

- Soit $a \in]0; \pi[$.

Montrons que la partie $[-a; a] \times [0; 1]$ de \mathbb{R}^2 est fermée et bornée.

★ Elle est bornée car si $(t, u) \in [-a; a] \times [0; 1]$, alors $\|(t, u)\|_2 = \sqrt{t^2 + u^2} \leq \sqrt{a^2 + 1}$.

★ Elle est fermée car si $((t_n, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[-a; a] \times [0; 1]$ convergeant vers un certain $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, alors $(t, u) \in [-a; a] \times [0; 1]$ par passage des inégalités larges à la limite.

Le théorème de compacité assure donc que la fonction continue γ est bornée et atteint ses bornes sur $[-a; a] \times [0; 1]$. Ainsi en notant m_a son minimum sur $[-a; a] \times [0; 1]$, on a :

$$\forall (t, u) \in [-a; a] \times [0; 1], \quad |1 + ue^{it}| \geq m_a$$

et il existe $(t_0, u_0) \in [-a; a] \times [0; 1]$ tel que $m_a = |1 + u_0 e^{it_0}|$.

Or comme en question **6**, on a $z = -e^{it_0}$ de module 1 et distinct de 1 (car $t_0 \in [-a; a] \subset]-\pi; \pi[$), donc $u_0 z \neq 1$, i.e. $1 - u_0 z = 1 + u_0 e^{it_0} \neq 0$, et donc $m_a > 0$.

- 11.** On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

On pose, pour tout $(t, u) \in]-\pi; \pi[\times [0; 1]$, $f(t, u) = \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}}$.

★ Pour tout $u \in [0; 1]$, la fonction $t \mapsto f(t, u)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\pi; \pi[$, car $t \mapsto e^{it}$ l'est, et :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, u) = \frac{ie^{it}(1 + ue^{it}) - e^{it}iue^{it}}{(1 + ue^{it})^2} = \frac{ie^{it}}{(1 + ue^{it})^2}.$$

★ Pour tout $t \in]-\pi; \pi[$, la fonction $u \mapsto f(t, u)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; 1]$.

★ Pour tout $t \in]-\pi; \pi[$, la fonction $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, u)$ est continue sur le segment $[0; 1]$.

★ Pour tout $a \in]0; \pi[$ et pour tout $(t, u) \in [-a; a] \times [0; 1]$, on a par la question **10** :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, u) \right| = \frac{1}{|1 + ue^{it}|^2} \leq \frac{1}{m_a^2}$$

et la fonction constante $u \mapsto \frac{1}{m_a^2}$ est intégrable sur $[0; 1]$ (car cet intervalle est borné).

Donc le théorème s'applique et montre que la fonction $F : t \mapsto \int_0^1 f(t, u) du$ est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle $[-a; a]$ où $a \in]0; \pi[$, donc sur leur réunion $]-\pi; \pi[$, et que :

$$\forall t \in]-\pi; \pi[, \quad F'(t) = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1 + ue^{it})^2} du.$$

- 12.** • Soit $t \in]-\pi; \pi[$. On déduit de la formule trouvée ci-dessus, par primitivation directe, que :

$$F'(t) = \left[\frac{-i}{1 + ue^{it}} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{-i}{1 + e^{it}} + i = \frac{ie^{it}}{1 + e^{it}}.$$

Or $1 + e^{it} = e^{it/2}(e^{-it/2} + e^{it/2}) = 2 \cos(t/2)e^{it/2}$, donc :

$$F'(t) = \frac{ie^{it/2}}{2 \cos(t/2)} = \frac{i(\cos(t/2) + i \sin(t/2))}{2 \cos(t/2)} = \frac{i}{2} - \frac{\tan(t/2)}{2}.$$

- On déduit de la formule ci-dessus, à nouveau par primitivation directe, et en tenant compte de ce que $t \mapsto -\frac{\tan(t/2)}{2} = -\frac{\sin(t/2)}{2\cos(t/2)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ où $u : t \mapsto \cos(t/2)$ est strictement positive sur $] -\pi; \pi[$, l'existence d'une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in] -\pi; \pi[, \quad F(t) = \ln(\cos(t/2)) + \frac{it}{2} + C.$$

Or $F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+u} du = \left[\ln(1+u) \right]_0^1 = \ln(2)$, donc $C = \ln(2)$, de sorte que :

$$\forall t \in] -\pi; \pi[, \quad F(t) = \ln(2\cos(t/2)) + \frac{it}{2}.$$

13. Soit $\theta \in]0; 2\pi[$.

- En appliquant la question **9** à $z = e^{i\theta}$, qui vérifie bien $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, on voit que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = L(1) = \int_0^1 \frac{e^{i\theta} du}{1 - ue^{i\theta}}.$$

- On note que $-e^{i\theta} = e^{i(\theta-\pi)}$ avec $\theta - \pi \in] -\pi; \pi[$, de sorte que :

$$\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - ue^{i\theta}} du = \int_0^1 \frac{-e^{i(\theta-\pi)}}{1 + ue^{i(\theta-\pi)}} du = -F(\theta - \pi)$$

et ainsi par la question **12** et l'identité trigonométrique $\cos(a - \pi/2) = \sin(a)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -F(\theta - \pi) = -\ln\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{i(\theta - \pi)}{2} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{i(\pi - \theta)}{2}.$$

- Comme la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge, il en va de même de ses parties réelle et imaginaire $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$, et en identifiant les parties réelle et imaginaire dans l'égalité précédente, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

Rq. Dans les questions **14** et **15**, la symétrie de X ne sert pas.

14. Soit $t \in \mathbb{R}$.

- La variable aléatoire $Y_t = \cos(tX)$ est bornée, comprise entre -1 et 1 , donc par la question **2**, Y_t est d'espérance finie, i.e. $\Phi_X(t) = \mathbf{E}(Y_t)$ est bien défini, et par croissance de l'espérance :

$$-1 = \mathbf{E}(-1) \leq \mathbf{E}(Y_t) = \Phi_X(t) \leq \mathbf{E}(1) = 1.$$

Donc la fonction Φ_X est bien définie sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$.

- De plus, on a évidemment $Y_t = \cos(tX) = \cos(-tX) = Y_{-t}$ puisque \cos est une fonction paire, donc $\Phi_X(t) = \mathbf{E}(Y_t) = \mathbf{E}(Y_{-t}) = \Phi_X(-t)$, donc la fonction Φ_X est paire.

15. Par théorème de transfert, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \mathbf{E}(\cos(tX)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n) \mathbf{P}(X = x_n)$.

Donc Φ_X est la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : t \mapsto \mathbf{P}(X = x_n) \cos(tx_n)$. On applique alors le théorème de continuité des séries de fonctions.

★ Les fonctions u_n sont continues sur \mathbb{R} (puisque \cos l'est).

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| = \mathbf{P}(X = x_n)$, et la série $\sum \mathbf{P}(X = x_n)$ converge, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} .

Ainsi le théorème s'applique et montre que la somme $\Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur \mathbb{R} .

16. On suppose désormais que X , en plus d'être symétrique, est entière et vérifie la condition \mathcal{D}_α (où $\alpha > 0$). Soit $t \in]0; 2\pi[$.

• On commence par montrer l'indication, i.e. que la série $\sum R_n \cos(nt)$ converge.

$$\text{Par } \mathcal{D}_\alpha, \text{ on a } R_n \cos(nt) = \mathbf{P}(|X| \geq n) \cos(nt) = \frac{\alpha \cos(nt)}{n} + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or d'après la question 13, la série $\sum \frac{\cos(nt)}{n}$ converge (car $t \in]0; 2\pi[$), et le terme en $O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ est, par comparaison, le terme général d'une série absolument convergente, donc convergente.

La série $\sum R_n \cos(nt)$ est donc la somme de deux séries convergentes, donc est convergente.

• Montrons que $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$.

Comme \cos est paire, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(tX) = \cos(t|X|)$, donc

$$\Phi_X(t) = \mathbf{E}(\cos(tX)) = \mathbf{E}(\cos(t|X|)) = \Phi_{|X|}(t).$$

Comme X est entière, $|X|$ est à valeurs dans \mathbb{N} , donc par théorème de transfert⁵ :

$$\Phi_X(t) = \Phi_{|X|}(t) = \mathbf{E}(\cos(t|X|)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tn) \mathbf{P}(|X| = n).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R_n - R_{n+1} = \mathbf{P}(|X| \geq n) - \mathbf{P}(|X| \geq n+1) = \mathbf{P}(|X| = n)$ car X est entière, donc on a bien :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt).$$

• Montrons que $\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)]$.

5. Sans passer par $|X|$, le théorème de transfert appliqué à X donne $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n) \mathbf{P}(X = x_n)$, où $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une énumération de \mathbb{Z} (cf. remarque initiale), et cela complique l'identification à $\sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$, puisqu'il faut alors passer par une sommation par paquets à la limite du programme (voire hors programme) en PSI.

Puisque les séries $\sum R_n \cos(nt)$ et $\sum (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$ convergent par les points précédents, la série $\sum R_{n+1} \cos(nt)$ converge elle-aussi (comme différence des deux précédentes) et par linéarité :

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n+1} \cos(nt) \\ &= R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos((n-1)t) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)]\end{aligned}$$

puisque $R_0 = P(|X| \geq 0) = 1$.

17. • Posons $f_n(t) = \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$.

Les fonctions f_n sont continues sur \mathbb{R} et $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \left|R_n - \frac{\alpha}{n}\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par propriété \mathcal{D}_α , donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} par comparaison.

Le théorème de continuité des séries de fonctions montre alors que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est bien définie et continue sur \mathbb{R} . Elle est donc en particulier continue en 0, de sorte que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} C = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right).$$

De plus comme α et les R_n sont réels, on a bien $C \in \mathbb{R}$.

• En séparant les parties réelle et imaginaire dans le point précédent, on obtient puisque $C \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \cos(nt) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} C \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \sin(nt) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Pour $t \in]0; 2\pi[$, les séries $\sum \frac{\cos(nt)}{n}$ et $\sum R_n \cos(nt)$ convergent (questions **13** et **16**) donc on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \cos(nt) + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n} \\ &= O_{t \rightarrow 0}(1) - \alpha \ln\left(2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= O_{t \rightarrow 0}(1) - \alpha \ln(t) - \alpha \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \\ &= -\alpha \ln(t) + O_{t \rightarrow 0}(1) \quad \text{car} \quad \frac{\sin(t/2)}{t/2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 \quad \text{donc} \quad \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) = O_{t \rightarrow 0}(1) \\ &= O_{t \rightarrow 0^+}(\ln(t)).\end{aligned}$$

De même pour $t \in]0; 2\pi[$, la série $\sum \frac{\sin(nt)}{n}$ converge (question **13**), donc la série $\sum R_n \sin(nt)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes⁶, et par linéarité :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \sin(nt) + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \\ &= o_{t \rightarrow 0^+}(1) + \alpha \frac{\pi - t}{2} = \frac{\alpha\pi}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(1).\end{aligned}$$

6. On peut aussi le démontrer directement comme dans l'indication en question **16**, en remplaçant cos par sin.

18. Soit $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

- Par la dernière formule de la question 16, on a $\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)]$.

Avec l'identité $\cos((n-1)t) = \cos(nt)\cos(t) + \sin(nt)\sin(t)$ et la question 17 (qui garantit que toutes les sommes écrites sont bien définies), on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [(1 - \cos(t))\cos(nt) - \sin(t)\sin(nt)] \\ &= 1 + \underbrace{(1 - \cos(t)) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt)}_{A(t)} - \underbrace{\sin(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt)}_{B(t)}.\end{aligned}$$

Or $1 - \cos(t) = O_{t \rightarrow 0}(t^2)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O_{t \rightarrow 0^+}(\ln(t))$, donc $A(t) = O_{t \rightarrow 0^+}(t^2 \ln(t))$, et $t \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées, donc $A(t) = o_{t \rightarrow 0^+}(t)$.

De même, $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\alpha\pi}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(1)$, donc $B(t) = \frac{\alpha\pi t}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(t)$.

Donc on a bien :

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\alpha\pi t}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(t).$$

- Ainsi Φ_X est dérivable à droite en 0 et que sa dérivée à droite en 0 est $(\Phi_X)'_d(0) = -\frac{\alpha\pi}{2}$, puisque :

$$\frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} = \frac{\Phi_X(t) - 1}{t} = -\frac{\alpha\pi}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Mais Φ_X est paire (question 14), donc par symétrie, Φ_X est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée à gauche en 0 est $(\Phi_X)'_g(0) = \frac{\alpha\pi}{2}$.

Comme les dérivées de Φ_X à gauche et à droite en 0 sont distinctes, Φ_X n'est pas dérivable en 0 (son graphe y présente un point anguleux).

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables aléatoires M_n

Rq. Toutes les espérances écrites dans les questions suivantes existent au vu de la question 2 : toute variable aléatoire bornée admet une espérance.

19. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition de Φ_{X+Y} et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\Phi_{X+Y}(t) &= \mathbf{E}(\cos(t(X+Y))) = \mathbf{E}(\cos(tX)\cos(tY) - \sin(tX)\sin(tY)) \\ &= \mathbf{E}(\cos(tX)\cos(tY)) - \mathbf{E}(\sin(tX)\sin(tY)).\end{aligned}$$

Or les variables X et Y sont indépendantes, donc les variables $\cos(tX)$ et $\cos(tY)$ (resp. $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$) le sont aussi, donc par propriété de l'espérance d'un produit de deux variables indépendantes :

$$\begin{aligned}\Phi_{X+Y}(t) &= \mathbf{E}(\cos(tX))\mathbf{E}(\cos(tY)) - \mathbf{E}(\sin(tX))\mathbf{E}(\sin(tY)) \\ &= \Phi_X(t)\Phi_Y(t) - \mathbf{E}(\sin(tX))\mathbf{E}(\sin(tY)).\end{aligned}$$

Mais X est symétrique et la fonction $f_t : x \mapsto \sin(tx)$ est impaire, donc par la question 4, $\mathbf{E}(\sin(tX)) = 0$, donc on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. On a $M_n = \frac{S_n}{n}$ où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

• Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n est symétrique et que $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{S_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n$.

★ C'est clair pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel S_n est symétrique et $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{M_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n$.

Alors, puisque X_{n+1} est indépendant de S_n (c'est admis dans le préambule, et c'est un cas particulier du lemme des coalitions), on voit par la question 5 que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est symétrique, et par la question 19 que $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{S_{n+1}}(t) = \Phi_{S_n}(t)\Phi_{X_{n+1}}(t)$.

Or X_{n+1} suit la même loi que X_1 , donc $\cos(tX_{n+1})$ suit la même loi que $\cos(tX_1)$ par le théorème 1 du préambule, donc $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{X_{n+1}}(t) = \mathbf{E}(\cos(tX_{n+1})) = \mathbf{E}(\cos(tX_1)) = \Phi_{X_1}(t)$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{S_{n+1}}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n \Phi_{X_1}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^{n+1}$.

On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est symétrique et $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{S_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n$.

• Puisque S_n est symétrique, $M_n = \frac{S_n}{n}$ l'est aussi, et on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \mathbf{E}(\cos(tM_n)) = \mathbf{E}\left(\cos\left(\frac{t}{n}S_n\right)\right) = \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

21. • Soit $t > 0$. Puisque X_1 est entière, symétrique et vérifie \mathcal{D}_α , la question 18 s'applique et donne :

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = 1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc vu la question 20, $\Phi_{M_n}(t) = \left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$ pour n assez grand.

Or $\ln\left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\pi\alpha t}{2n}$, donc $n \ln\left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi\alpha t}{2}$.

On obtient ainsi :

$$\forall t > 0, \quad \Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\pi\alpha t}{2}\right).$$

• Comme Φ_{M_n} est paire (question 14), on a alors pour $t < 0$:

$$\Phi_{M_n}(t) = \Phi_{M_n}(-t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\pi\alpha(-t)}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

• Enfin ce résultat est évident pour $t = 0$ (car $\Phi_{M_n}(0) = 1 = \exp(0)$).

On a donc bien : $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$.

22. Posons $g : t \mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{M_n}(2n\pi) = (\Phi_{X_1}(2\pi))^n = (\mathbf{E}(\cos(2\pi X_1)))^n = 1$ puisque X_1 est entière, donc $\cos(2\pi X_1) = 1$ et donc $\mathbf{E}(\cos(2\pi X_1)) = 1$. Ainsi :

$$|\Phi_{M_n}(2n\pi) - g(2n\pi)| = 1 - \exp(-\pi^2\alpha n) \leq \|\Phi_{M_n} - g\|_{\infty, \mathbb{R}}.$$

Comme $1 - \exp(-\pi^2\alpha n)$ tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$, la norme $\|\Phi_{M_n} - g\|_{\infty, \mathbb{R}}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, de sorte que la convergence de la suite $(\Phi_{M_n})_{n \in \mathbb{N}}$ vers g n'est pas uniforme sur \mathbb{R} .