Trigonalisations concrètes

Exercice 1. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Montrer avec le moins de calculs possibles que la matrice A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Donner , à l'aide de calculs, une matrice de passage pour la relation du a).

Exercice 3 (Version améliorée des trois cas du cours (Jordan))**.** Soit E un K-e.v. de dim. 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ non diagonalisable, mais trigonalisable.

a) Combien u peut-il avoir de valeurs propres ?

b) On se place dans le cas où u a deux valeurs propres α et β avec $\chi_u = (X - \alpha)(X - \beta)^2$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

c) On suppose désormais que u admet une unique valeur propre, qu'on note λ et que $u \neq \lambda\,\mathrm{id}$.

(i) Que dire de $(u - \lambda\,\mathrm{id})^3$? En fait les deux questions qui suivent sont basées sur la réduction de $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$

(ii) Si $(u - \lambda\,\mathrm{id})^2 \neq 0$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(iii) Si $(u - \lambda\,\mathrm{id})^2 = 0$ montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Nilpotence, unipotence

Exercice 4. Quel est le s.e.v. de $M_n(\mathbb{K})$ engendré par l'ensemble des matrices nilpotentes ?

Exercice 5 (Propriété des matrices de Jordan)**.** Soit $J \in M_n(K)$ une matrice de Jordan i.e. telle que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $J(i, i+1) = 1$ et pour $j \neq i+1$, $J(i,j) = 0$.

a) Montrer que J et $J^\top$ sont semblables.

b) Soit $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Montrer que J et λJ sont semblables.

Exercice 6 (Caractérisation des unipotents)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f = \mathrm{id} + n$ où n est un endomorphisme nilpotent,

(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f admet une matrice de la forme $I + T$ où T est triangulaire sup. stricte,

(iii) toutes les racines de χ_f dans $\mathbb{C}$ sont égales à 1.

Exercice 7 (Grand classique... résultat à connaître absolument)**.** Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$ alors A est nilpotente.

Exercice 8 (Variante du précédent, version unipotente)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ Montrer que si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = n$ alors la seule valeur propre de A est 1.

Applications de la trigonalisation

Exercice 9 (Application aux morphismes multiplicatifs)**.** Soit $\Phi : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telle que

a) $\forall\,(A,B) \in M_2(\mathbb{C})^2,\ \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$,

b) $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}, \Phi(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \lambda$

Montrer que Φ =det.

N.B. On peut montrer avec des hypothèses assez faibles, que les Φ vérifiant a) sont toujours de la forme $\varphi \circ \det$ avec φ multiplicative dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{K}$).

Exercice 10 (Applications à une suite récurrente linéaires d'ordre trois)**.** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite à valeurs réelles définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}.$$

a) **Vectorialisation :** Pour chaque entier n, on définit un vecteur $U_n \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ par $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

  i) Expliciter une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

  ii) En déduire une relation matricielle simple entre U_n et U_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que A est semblable à une matrice

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

où l'on précisera la valeur de a et b.

c) En déduire de la première partie une écriture *explicite* de U_n en fonction de n, P et P^{-1}.

d) En déduire une formule explicite donnant u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Montrer que dans un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ il existe toujours au moins $n(n-1)/2$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.

Indication – Soit H un tel hyperplan. Justifier qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $H = \{X \in M_n(\mathbb{C}), \mathrm{Tr}(AX) = 0\}$ et se ramener au cas où A est une matrice triangulaire.

Trigonalisation simultanée

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie.

a) Montrer que deux endomorphismes de E qui sont trigonalisables , commutant entre eux, se trigonalisent dans la même base.

b) Généralisation à p endomorphismes commutant deux à deux.

c) Soient $u_1, \ldots, u_n$ des endomorphismes, avec $n = \dim E$, tous nilpotents et commutant deux à deux. Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Sous-espaces caractéristiques

Exercice 13. a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer *tous* les s.e.v. stables par l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice réelle

Exercice 14. Soit E un K-e.v. et $L \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_L soit scindé : $\chi_L = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{\omega_i}$ (hyp. toujours vérifiée si $K = \mathbb{C}$).

On note aussi $\mu_L = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{\nu_i}$.

Pour alléger on note λ au lieu de λ_i une v.p. de L. et ν et ω pour ν_i et ω_i.

a) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de l'endomorphisme induit L_{Γ_λ}.

b) Justifier que la suite des noyaux $(\ker((L-\lambda\,\mathrm{id})^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang ν, puis constante. En particulier le s.e.v. caractéristique $\ker(L-\lambda\,\mathrm{id})^\omega$ coïncide avec $\ker(L-\lambda\,\mathrm{id})^\nu$.

Exercice 15 (Annoncé dans le cours)**.** Montrer que toute matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Idée de la réduction sur les s.e.v. caractéristiques : il suffit de prouver le résultat pour les matrices de la forme $\lambda I + N$ avec $\lambda \neq 0$ et N nilpotents.

Idée pour une racine carrée de $\lambda I + N$ pour $\lambda \neq 0$: avec la formule donne par le polynôme de Taylor de $\sqrt{1+x}$.