Loi de v.a.

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant pour un réel a fixé :

$$\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{(i+j+1)!},$$

a) Déterminer le réel a.
b) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 (Mines-Telecom 2021)**.** Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

— si on obtient pile : on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce,

— si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

a) Déterminer la loi de X.

b) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 3 (CCINP MP 2021)**.** Soient X et Y deux v.a.d indépendantes de même loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$.

Donner la loi de $|X - Y|$ puis son espérance.

Exercice 4 (Méthode de « couplage »)**.** Soient n un entier naturel non nul et $p \in]0,1[$, X et Y des variables suivant les lois binomiales de paramètres n et p, et $n+1$ et p respectivement. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \geqslant k) \leq \mathbb{P}(Y \geqslant k)$.
Indication de solution par « couplage » : construire X' et Y' des variables aléatoires telles que : X' suit la même loi que X, Y' suit la même loi que Y, et $X' \leqslant Y'$.

Exercice 5. Soit X une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$$

où $p \in]0,1[$ est fixé. Montrer que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exercice 6. Soient X et $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ deux v.a. telles que $X \leq Y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) \neq 0$.

On suppose que la loi conditionnelle de X par rapport à $Y = n$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

a) Montrer que les v.a. $Y - X + 1$ et X ont même loi.

b) On suppose dans cette question seulement que X suit une loi géométrique de paramètre p.

   i) Déduire de la formule $\mathbb{P}(X = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{n}$ une expression de $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = k)$ et de $\mathbb{P}(X = k+1)$ pour tout k. En déduire la loi de Y.

   ii) Montrer que les v.a. $Y - X + 1$ et X sont indépendantes.

c) Montrer que la réciproque du b) (ii) est vraie.
Indication – On pourra se ramener au résultat de l'exercice 5.

Exercice 7.

1) On suppose dans ce 1) que le nombre N d'enfants par famille suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
A chaque naissance la probabilité que l'enfant soit une fille est p, et un garçon $1 - p$.
On note X la v.a. nombre de filles dans la famille, et Y celle du nombre de garçons.

   a) Déterminer la loi conjointe de (N, X) puis la loi de X et de Y.

   b) Montrer que X et Y sont indépendantes.

2) Le résultat du 1. b) peut surprendre : en fait il est spécifique à la loi de Poisson comme on va le montrer maintenant par une réciproque.
On note encore N le nombre d'enfants par famille. On suppose encore qu'à chaque naissance la probabilité que l'enfant soit une fille est p, et un garçon $1 - p$.
On note X la v.a. nombre de filles dans la famille, et Y celle du nombre de garçons.
On suppose cette fois que X et Y sont indépendants. On veut montrer que N suit une loi de Poisson.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(N = n) \neq 0$ et on connaît la loi conditionnelle de X et Y sachant $\{N = n\}$, en considérant bien sûr les naissances comme des événements indépendants.

a) Montrer que si une v.a. discrète Z vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N}, \dfrac{\mathbb{P}(Z = n+1)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \dfrac{\lambda}{n+1}$ alors $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout couple (i, j) d'entiers tels que $i + j = n$ on peut écrire $n!\,\mathbb{P}(N = n)$ sous la forme d'un produit $\alpha_i.\beta_j$.

c) Conclure qu'il existe bien un $\lambda > 0$ tel que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 8. Motivation : on a vu qu'une suite de tirages avec remise dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes revient à une suite de tirages de Bernoulli indépendants donc suit une loi binomiale. Qu'en est-il d'une suite de tirages sans remise ?

a) **Cadre :** On considère un ensemble fini $U = U_1 \coprod U_2$ partitionné en deux sous-ensembles avec U_1 de cardinal r_1 et U_2 de cardinal r_2 et on note $r = r_1 + r_2$ le cardinal de U.

Soit n un entier tel que $1 \leq n < r$. On extrait « au hasard » n éléments de U : on appelle X la v.a. qui donne le nombre d'éléments de U_1 qu'on a extrait. Déterminer la loi de X. Cette loi s'appelle *loi hypergéométrique* de paramètres (n, r_1, r_2) notée aussi $\mathcal{H}(n, r_1, r_2)$.

b) Démontrer que l'espérance d'une v.a. X qui suit une loi hypergéométrique de paramètres (n, r_1, r_2) vaut : $E(X) = \dfrac{r_1.n}{r} = p.n$ où $p = \dfrac{r_1}{r}$ est la proportion de boules dans U_1 (sous cette forme la formule est la même que pour une variable suivant $\mathcal{B}(n, p)$).

c) Soit X une v.a. qui suit une loi hypergéométrique de paramètres (n, r_1, r_2). On pose $r = r_1 + r_2$ et $p = \dfrac{r_1}{r}$, de sorte que $1 - p = \dfrac{r_2}{r}$.

On fait tendre $r = r_1 + r_2$ vers l'infini, en gardant $p = r_1/r$ constant et n constant (autrement dit on fait tendre le nombre de boules dans l'urne vers l'infini, mais en gardant constante la proportion de boules dans U_1 et on prélève toujours le même nombre n de boules).

Montrer que : $P(X = k) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Ce résultat s'interprète en disant que que la différence entre tirage sans remise et tirage avec remise s'efface lorsque la population sur laquelle on effectue le tirage devient très grande. On parle de CV en loi.

Exercice 9 (Second lemme de Borel-Cantelli)**.** Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge *et* (A_n) sont mutuellement indépendants.

On veut montrer que l'événement « être dans A_n infiniment souvent » est de probabilité 1. Pour cela, on pourra suivre la marche suivante :

a) Montrer que pour chaque $r \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=r}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) En déduire le résultat demandé en s'intéressant au complémentaire, autrement dit, montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_{r=0}^{\infty} \bigcap_{n \geq r} A_n^c) = 0$.

c) A l'aide d'un contre-exemple simple, montrer que l'hypothèse que les (A_n) sont indépendants est nécessaire.

Exercice 10 (Application de B.C. 2 : le singe tapant à la machine)**.** Un singe tape à la machine indéfiniment : montrer qu'il écrira avec probabilité 1 n'importe quel ouvrage littéraire connu (et même une infinité de fois).

Propriétés de l'espérance

Exercice 11. Dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n, on effectue des tirages successifs avec remise. On appelle X le nombre de tirages nécessaires pour que réapparaisse pour la première fois une boule déjà tirée.

a) Calculer $\mathbb{P}(X > k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n!}{n^n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}$.

Exercice 12. Soit X une v.a.d. strictement positive. Montrer que $\mathbb{E}(X + \dfrac{1}{X}) \geq 2$.

Exercice 13 (Méthode importante de calcul d'espérance)**.** On considère l'univers $\Omega = S_n$ de toutes les permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme. Pour chaque σ dans S_n, on note $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.

Calculer $\mathbb{E}(X)$ autrement dit le nombre moyen de points fixes d'une permutation $\sigma \in S_n$.
Indication – Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pourra considérer l'indicatrice de l'événement A_i : « i est un point fixe de la permutation tirée. »

Version plus mondaine : n couples mariés arrivent à un bal et chaque cavalier choisit une cavalière aléatoirement. Quel est le nombre moyen de couples mariés qui vont danser ensemble ?