Tribus

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

a) Montrer que $B := \{\omega \in \Omega,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \omega \in \bigcap_{n\geq n_0} A_n\}$ est un événement i.e. que $B \in \mathcal{A}$.

On dira que B est l'événement « A_n est réalisée A.P.C.R »

b) Montrer que $C := \{\omega \in \Omega,\ \omega$ n'appartient qu'à un nombre *fini* d'événements $A_n\}$ est encore un événement i.e. $C \in \mathcal{A}$.

c) En déduire que l'événement $D := \{\omega \in \Omega,\ \omega$ appartient à un nombre *infini* d'événements $A_n\}$ est un événement. On dit que D est l'événement « A_n est réalisée infiniment souvent ».

Exercice 2. a) Expliquer ce que fait le code Python suivant à l'aide de la documentation du type `set` et exécuter ce code

```
p = [set(), {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}]

for i in range(256):
    b = bin(256 + i)[3:]
    t = [p[x] for x in range(8) if b[x] == '1']
    if ({1,2,3} in t) and all([((x & y) in t) and ((x - y) in t) for x in t for y in t]):
        print(t)
```

b) Retrouver le résultat du a) sans ordinateur.

Exercice 3 (Tribu engendrée : définition et un exemple)**.**

a) Justifier que si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille des tribus sur un ensemble Ω alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est encore une tribu de Ω.

b) En déduire que pour toute partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ il existe une plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{M}$. On l'appelle par la suite la tribu engendrée par $\mathcal{M}$ et on la note $\sigma(M)$.

c) Soit $\Omega = \mathbb{R}$. Décrire la tribu de Ω engendrée par les singletons.

Axiomes des proba., calculs simples

Exercice 4. On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile (noté P) étant $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir face (noté F) étant $q = 1 - p$.

a) Calculer la probabilité de l'événement A « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FP ».

b) Pour tout $n \geqslant 2$, calculer la probabilité de l'événement B_n « la séquence PF apparait pour la première fois aux lancers $n-1$ et n et il n'y a pas eu avant de séquence FP ". En déduire la probabilité de l'événement B « la première séquence PF apparait avant la première séquence FP »

c) Déterminer de même la probabilité des événements :

   i) C « la première séquence PF apparaît avant la première séquence FF »

   ii) D « la première séquence PP apparaît avant la première séquence FF »

Exercice 5. Démontrer la sous-additivité des proba. énoncée en cours :

(i)Version séquentielle : soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq +\infty$$

Indication – On pourra commencer par les unions finies.

(ii) Version famille : soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'événements alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \leq +\infty$$

Exercice 6 (Premier lemme de Borel Cantelli)**.** a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que l'événement « être dans A_n infiniment souvent » est de probabilité nulle.

b) Une application :

Une puce fait des bonds sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ soit de $+1$ (vers la droite) avec proba. $p = 1/2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-100}$ soit de -1 (vers la gauche) avec proba $1 - p$.

Montrer que presque sûrement, elle ne repassera qu'un nombre fini de fois à son point de départ qui est 0.

Indication – L'événement « retour au point de départ au temps $2n$ « peut s'écrire $S_{2n} = 0$ où S_k est la somme des k premiers sauts.

Révision de première année (ou de lycée !)

Exercice 7. On tire 8 cartes d'un jeu de 52 cartes bien battues. Quelle est la probabilité :

a) que 4 cartes soient un as,

b) que 4 cartes soient un as et 2 cartes soient des rois,

c) au moins une carte soit un as ?

Exercice 8. Stefan Banach (1892-1945), qui était fumeur, avait toujours sur lui deux boîtes d'allumettes, une dans la poche gauche, l'autre dans la droite. A chaque fois qu'il allumait sa pipe, il sélectionnait aléatoirement une boîte des deux boîtes, puis une allumette à l'intérieur. Il remettait ensuite la boîte dans la poche d'où il l'avait tirée. Immanquablement, au bout d'un certain temps, il ouvrait une boîte et la trouvait vide. L'autre boîte contenait encore quelques allumettes. Combien ?

Dans toute la suite, on suppose que les deux boîtes contiennent initialement le même nombre n d'allumettes. On notera X_n le nombre d'allumettes dans la boîte non vide à la fin de l'expérience.

a) Déterminer un univers Ω pouvant modéliser une telle expérience. On pourra utiliser des suites finies à valeurs dans $\{0, 1\}$. Quelle probabilité attribuer à une issue donnée ?

b) Déterminer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k)$.

Exercice 9. Un fumeur décide de ne plus fumer. S'il ne fume pas un jour j, il ne fumera pas le jour $j+1$ avec la probabilité p_1. S'il fume le jour j, il ne fumera pas le jour $j+1$ avec la probabilité p_2.

On suppose qu'au jour 0, qui est le jour où le fumeur prend sa décision, il ne fume pas.

a) Exprimer en fonction de p_1 et p_2 la probabilité qu'il ne fume pas le jour n : qu'on notera π_n ce nombre.

b) Etudier la limite de π_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 10. On dispose de deux boites A et B, deux boules noires et deux boules rouges. Au départ, on place deux boules aléatoirement dans chaque boite. A chaque essai, on tire une boule de chacune des boites et on la replace dans l'autre. Soit X_0 le nombre de boules noires placées initialement dans A et X_n le nombre de boules noires dans A après n essais. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = P(X_n = 0), \quad q_n = P(X_n = 1), \quad r_n = P(X_n = 2).$$

a) Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

b) Montrer que la matrice M est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1, 0, \frac{-1}{2})$.

c) En déduire que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) convergent et déterminer leurs limites respectives.