DS 5 MP2 Samedi 28 Janvier 2023

Épreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Objectifs.

Le but du problème est d'étudier, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, la distance d'un vecteur à un hyperplan.

Dans la partie I, on étudie un exemple dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Dans la partie II, on étudie le cas de la dimension finie, puis on montre que les hyperplans sont fermés ou denses.

Dans la partie III, on étudie le cas des hyperplans denses.

Dans la partie IV, on étudie un exemple d'hyperplan fermé.

Les quatre parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels, on le munit du produit scalaire défini par :

$$(A|B) = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$$

où A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est la transposée de la matrice A et $\operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ est la trace de la matrice ${}^tAB$.

Soit $F = (f_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} f_{i,i} = 1, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n. \\ f_{i,1} = 1 \text{ pour } 2 \leqslant i \leqslant n. \\ f_{i,n} = 1 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1. \\ f_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On note H l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(F|X) = 0$.

1) Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) On note $X = (x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, exprimer $(F|X)$ en fonction des $x_{i,j}$.

3) On rappelle que la distance d 'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'hyperplan H est définie par :

$$d(M,H) = \inf_{U\in H} \|M-U\|$$

où la norme $\|\|$ est la norme associée au produit scalaire $(\ |\ )$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$d(M,H) = \frac{|(F|M)|}{\|F\|}.$$

4) Calculer $\|F\|$ en fonction de n.

5) On note $B = F - I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

   a) Déterminer le rang de B.

   b) Calculer B^2, montrer que B^2 et B ont le même rang.

   c) On appelle g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, tel que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ soit la matrice B.
   On rappelle que $\mathrm{Ker}g$ et $\mathrm{Im}g$ désignent respectivement, le noyau et l'image de l'endomorphisme g. Montrer que :

   $$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}g$$

   d) En déduire que la matrice B est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où B' est une matrice carrée d'ordre 2 inversible.

   e) Calculer les traces , $\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}\left(B^2\right)$, des matrices B et B^2, en déduire les valeurs propres de B'.

   f) En déduire les valeurs propres de F ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

6) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $k \geqslant 0$, de la forme $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, on définit $P\left({}^tF\right)$ par :

$$P\left({}^tF\right) = a_0 I_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \left({}^tF\right)^i.$$

Calculer la distance de la matrice $P\left({}^tF\right)$ à l'hyperplan H en fonction de P.
On pourra utilement poser : $S(X) = XP(X)$ et calculer $S\left({}^tF\right)$.

Partie II.

H est un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, h est une forme linéaire non nulle sur E, dont le noyau est égal à H.

1) Dans cette question, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E.

a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ d' éléments de H tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H) \cdot$$

b) Montrer qu'il existe une suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ extraite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers un élément de H.

c) En déduire qu'il existe y_0 appartenant à l'hyperplan H tel que :

$$d(x_0, H) = \|x_0 - y_0\| \cdot$$

On dit que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en y_0.

2) On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.

a) Montrer que si h est une forme linéaire continue sur E alors le noyau, Ker$h$, est fermé dans E.

b) Montrer que si le noyau, Ker$h$, de h est fermé alors h est continue. On pourra montrer que, si h n'est pas continue, alors il existe une suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ de E telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0. \\ h(t_n) = 1, \text{ pour tout entier } n. \end{cases}$$

Puis, on utilisera la suite $(t_n - t_0)_{n\geqslant 0}$ pour mettre en évidence une contradiction.

c) Montrer que si H est un hyperplan de E alors l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E.

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense, c'est à dire $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$.

Partie III.

On suppose dans cette partie que E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire : $\begin{array}{ccc} E\times E & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x|y) \end{array}$ et que H est un hyperplan dense de E, c'est à dire $\overline{H} = E$.

1) Déterminer $H^{\perp}$, l'orthogonal de H.

2) Que dire de $H \oplus H^{\perp}$?

3) Pour tout vecteur x de E, calculer la distance $d(x, H)$.

4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte? Justifier.

Partie IV.

On suppose dans cette partie que H est un hyperplan fermé, d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h, continue non nulle sur E. x_0 désigne un vecteur fixé de E. On rappelle que la norme de l'application h subordonnée à la norme de E est définie par :

$$|||h||| = \sup_{x\neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|}.$$

1) a) Montrer que, pour tout élément y de H on a :

$$\|x_0 - y\| \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

b) En déduire que la distance de x_0 à l'hyperplan H est supérieure ou égale à $\dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.

d) On considère dans cette question $x_0 \notin H$.

α) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $E\backslash\{0\}$ vérifiant :

$$|||h||| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}.$$

β) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel λ_n ~~non-nul~~ et un vecteur y_n de H tel que : $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$. et que les lambda_n sont non nuls A.P.C.R.

γ) Prouver que, pour tout entier n :A.P.C.R.

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.$$

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E, on a :

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}.$$

2) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que si $u \in E$ alors $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, E est ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

h est l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

a) Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

b) Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E, en déduire $|||h||| \leqslant 1$.

c) Soit $(v_p)_{p\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E, on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p. On définit v_p par :

$$\begin{cases} v_p(n) = 1 \text{ si } 0 \leqslant n \leqslant p. \\ v_p(n) = 0 \text{ si } n \geqslant p+1. \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $|||\,h\,|||$.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$|||\,h\,||| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}.$$

e) On note H le noyau de h, vérifier que H est un hyperplan fermé de E.

f) Montrer que la distance d'un vecteur x de E à l'hyperplan H n'est pas toujours atteinte.