Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n,\, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbf{N}$ et $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) *On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\mathbf{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) *On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On ~~admet~~ que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. **Justifiez-le !**

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n-ième moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} \, \mathrm{d}u.$$

6 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n-ième pour tout $n \geq 1$.

7 ▷ Justifier que pour tout $t \in \,]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.

8 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1 - t}{1 - tz} \right|^n \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1} (1 - t)^n}{(1 - tz)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$

10 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (t,u) & \longmapsto |1+ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in \left]0,\pi\right[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1], \quad |1+ue^{it}| \geq m_a.$$

11 ▷ Montrer que la fonction

$$F : t \in \left]-\pi,\pi\right[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▷ Montrer que

$$\forall t \in \left]-\pi,\pi\right[,\ F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in \left]-\pi,\pi\right[$.

13 ▷ Soit $\theta \in \left]0,2\pi\right[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\Big(2\sin\frac{\theta}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}\cdot$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \mathbf{E}\big(\cos(tX)\big), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X.

14 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbf{R},\ |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geq n).$$

16 ▷ On fixe un réel $t \in \,]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \Big[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\Big].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\, \alpha}{2} + o(1).$$

18 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\, \alpha}{2}\, t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\, \Phi_Y(t).$$

20 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \Big(\Phi_{X_1}(t/n)\Big)^n.$$

21 ▷ En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\Big(-\frac{\pi\alpha\,|t|}{2}\Big).$$

22 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbf{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$*,*

$$\mathbf{P}(a \leq M_n \leq b) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

Fin du problème