Concours Centrale-Supélec

Mathématiques II MP 2007

Dans tout ce problème E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Les vecteurs de E sont représentés par des lettres surmontées de flèches et le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de E est noté $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$. L'orthogonal d'un sous-espace F de E est noté $F^{\bigcirc}$. On note a^* l'adjoint de $a \in \mathcal{L}(E)$ pour la structure euclidienne définie par le produit scalaire $(|)$ et ab le composé de deux endomorphismes a et b de E.

Le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques est noté $\mathcal{S}(E)$.

On appelle endomorphisme antisymétrique un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a^* = -a$ et on note $\mathcal{A}(E)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué par les endomorphismes antisymétriques. L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.

On désigne par $O(E)$ l'ensemble des automorphismes othogonaux de E et $O^+(E)$ l'ensemble de ceux dont le déterminant est positif.

L'objectif de ce problème est de prouver que certains sous espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ contiennent des automorphismes orthogonaux. Les deux parties du problème sont indépendantes nonobstant la question I.B.2

Partie I - Cas d'un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$

I.A

I.A.1) *Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, .., \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée de E. Prouver que*

$$Tr(a) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{e_i}, a(\overrightarrow{e_i}))$$

Posons $\forall j \in [[1, n]]$, $a(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \overrightarrow{e_i}$ avec $\alpha_{i,j} = (\overrightarrow{e_i}, a(\overrightarrow{e_j}))$

On a alors $Tr(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{e_i}, a(\overrightarrow{e_i}))$

I.A.2) *Soient a et b deux endomorphismes de E. On pose $<< a, b >>= Tr(a^*b)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$*

Il s'agit de prouver que l'on a ainsi défini une forme bilinéaire symétrique,définie et positive sur $\mathcal{L}(E)$

On note déjà que $<< a, b >>\in \mathbb{R}$. De plus

$$<< b, a >>= Tr(b^*a) = Tr((b^*a)^*) = Tr(a^*b) =<< a, b >>$$

La trace étant une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, on a $\forall (a,b,c) \in \mathcal{L}(E)^3$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$<< a, b+\lambda c >>= Tr(a^*(b+\lambda c)) = Tr(a^*b)+\lambda Tr(a^*c) =<< a,b >> +\lambda << a,c >>$$

ceci assure , avec la symétrie, la bilinéarité de l'application $<<,>>$

enfin

$$<< a,a >>= Tr(a^*a) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{e_i}, a^*a(\overrightarrow{e_i})) = \sum_{i=1}^{n} (a(\overrightarrow{e_i}), a(\overrightarrow{e_i})) = \sum_{i=1}^{n} \left\| a(\overrightarrow{e_i}) \right\|^2 \geq 0$$

de plus si $<< a,a >>= 0$, alors $\forall i \in [[1,n]], \left\| a(\overrightarrow{e_i}) \right\|^2 = 0$ donc $\forall i \in [[1,n]], a(\overrightarrow{e_i}) = 0$ et ainsi $a = O_{\mathcal{L}(E)}$

L'orthogonal pour ce produit scalaire, d'un sous espace $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(E)$ sera noté $\mathcal{E}^\perp$

I.A.3) *Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{L}(E)$ pour $<<,>>$*

Soit $(a,b) \in \mathcal{S}(E) \times \mathcal{A}(E)$,

$$<< b,a >>= Tr(b^*a) = Tr(-ba) = -Tr(ba) = -Tr(ab) = - << a,b >>$$

donc $<< a,b >>= 0$ et $\mathcal{S}(E) \perp \mathcal{A}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$

d'autre part $\forall a \in \mathcal{L}(E), a = \frac{a+a^*}{2} + \frac{a-a^*}{2}$ donc $\mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E) = \mathcal{L}(E)$

On en déduit que $\mathcal{A}(E) = \mathcal{S}(E)^\perp$

I.B.1) *Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ de rang $r \geq 1$*

a) *Montrer que* $\ker a^*a = \ker a$ *et que* $rga^*a = rga$

Soit $x \in \ker a$, $a(x) = 0$ donc $a^*a(x) = 0$ donc $x \in \ker a^*a$.

Soit $x \in \ker a^*a$, $\|ax\|^2 = (ax \mid ax) = (x \mid a^*ax) = 0$ donc $ax = 0$ et donc $x \in \ker a$

ainsi $\ker a^*a = \ker a$

en particulier d'après le théorème du rang on en déduit que $rga^*a = rga$

b) *Montrer que a^*a possède au moins une valeur propre non nulle.*

$a^*a \in \mathcal{S}(E)$, donc a^*a est diagonalisable. On en déduit qu'il existe au moins une valeur propre pour a^*a. D'autre part si toutes les valeurs propres de a^*a étaient nulles, puisque cet endomorphisme est diagonalisable , il est nul, et donc $rga^*a = 0 = rga$ ce qui contredit $r \geq 1$

c) *Soit* $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$ *l'ensemble des valeurs propres non nulles de* a^*a*. En notant* $E(\lambda)$ *le sous espace propre de* a^*a *associé à la valeur propre* λ*, montrer que*

$$\operatorname{Im} a^* = \operatorname{Im} a^*a = \bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i)$$

On sait que

$$\dim(\operatorname{Im} a^*) = rg(a^*) = rg(a) = rg(a^*a) = \dim(\operatorname{Im} a^*a)$$

et que

$$\forall y \in \operatorname{Im}(a^*a), \exists x \in E, y = a^*a(x) = a^*(a(x))$$

donc $\operatorname{Im} a^*a \subset \operatorname{Im} a^*$

ceci permet d'en déduire que $\operatorname{Im} a^* = \operatorname{Im} a^*a$

D'autre part puique a^*a est diagonalisable ,

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{\lambda \in sp(a^*a)} E(\lambda), donc\ E = \ker(a^*a) \oplus [\bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i)] \\ \text{en particulier } \dim E &= \dim(\ker(a^*a)) + \dim \bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i) \end{aligned}$$

(le noyau pouvant être nul si $r = n$)

On remarque que

$\forall i \in [[I, s]]$, $E(\lambda_i) \subset \operatorname{Im}(a^*a)$ car si $y \in E(\lambda_i)$, $y = a(\frac{1}{\lambda_i} y)$.

Ainsi $\bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i) \subset \operatorname{Im}(a^*a)$

d'autre part, à l'aide du théorème du rang on obtient $rang(a^*a) = \dim \bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i)$

donc $\bigoplus_{i=1}^{s} E(\lambda_i) = \operatorname{Im}(a^*a)$

d) *Prouver l'existence d'une base orthonormée* $(e) = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ *de* E *et de scalaires* $\mu_1, .., \mu_n$ *avec* $\mu_i \neq 0$ *pour* $i \leq r$ *tels que* $a^*a(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i^2 \overrightarrow{e_i}$ *pour tout* $i \in \{1, .., n\}$*. Pour toute base orthonormée* (e) *vérifiant ces propriétés, que valent les* μ_i *si* $i > r$*?*

a^*a est diagonalisable dans une base orthonormée (e) de E. Ordonnons les vecteurs de (e) de telle sorte que les r premières valeurs propres soient non nulles et les $n - r$ suivantes sont nulles.

Tout d'abord on remarque $a^*a \in \mathcal{S}^+(E)$ car $\forall x \in E, (x \mid a^*a(x)) = (a(x) \mid a(x)) \geq 0$

Donc toutes les valeurs propres de a^*a sont positives ou nulles. On peut donc affirmer que les r premières valeurs propres de a^*a peuvent s'écrire $\mu_1^2, ..., \mu_r^2$ avec $\mu_i \neq 0$. et les $n-r$ dernières μ_i^2 avec $\mu_i = 0$.

D'autre part si (e) est une base qui vérifie ces propriétés , on a nécéssairement , en comptabilisant les valeurs propres non nulles de a^*a comme $\mu_1^2, ..., \mu_r^2$,tous les μ_i qui sont nuls lorsque $i > r$.

e) *La base (e) étant choisie comme dans la question précédente, prouver l'existence d'une base orthonormée $(f) = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, .., \overrightarrow{f_n})$ telle que $a(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i \overrightarrow{f_i}$ pour tout i.*

Posons pour tout $i \in \{1, .., r\}$, $\overrightarrow{f_i} = \frac{1}{\mu_i} a(\overrightarrow{e_i})$. $\forall i, j \in \{1, .., r\}^2$,

$$(f_i \mid f_j) = \frac{1}{\mu_i \mu_j}(a(\overrightarrow{e_i}) \mid a(\overrightarrow{e_j})) = \frac{1}{\mu_i \mu_j}(\overrightarrow{e_i} \mid a^*a(\overrightarrow{e_j})) = \frac{1}{\mu_i \mu_j}(\overrightarrow{e_i} \mid \mu_j^2 \overrightarrow{e_j})$$

donc $(f_i \mid f_j) = 0$ si $i \neq j$ et $(f_i \mid f_i) = 1$

On peut alors complèter $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, .., \overrightarrow{f_r})$ en une base orthonormée de de E.

I.B.2 *Soit $a \in \mathcal{L}(E), a \neq 0$, déduire de la question précédente l'existence de $u \in O(E)$ tel que $ua \in \mathcal{S}^+(E)$, et $Tr(ua) > 0$*

Considérons l'application linéaire u définie par: $\forall i \in \{1, .., n\}$, $u(f_i) = e_i$

u transformant une base orthonormée en une base orthonormée est donc un automorphisme orthogonal de E.

D'autre part $\forall i \in \{1, .., n\}, ua(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i u(f_i) = \mu_i \overrightarrow{e_i}$ donc ua est diagonalisable dans la base orthonormée (e), et ses valeurs propres μ_i sont toutes positives ou nulles, donc $ua \in \mathcal{S}^+(E)$

enfin $Tr(ua) = \sum_{i=1}^n \mu_i > 0$ car au moins l'un des μ_i est strictement positifs

I.C *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ et a un élément de $\mathcal{H}^\perp$.*

I.C.1) *La base (e) de E étant toujours choisie comme dans la question I.B.1.d , prouver l'existence de $h \in O(E)$ tel que, pour tout $i \in \{1, 2, .., n\}$, $ha(\overrightarrow{e_i}) \in Vect(\overrightarrow{e_i})^\bigcirc$.*

Supposons $n \geq 2$. Soit h l'endomorphisme de E défini par $\forall i \in \{1, .., n-1\}$, $h(\overrightarrow{f_i}) = \overrightarrow{e_{i+1}}$ et $h(\overrightarrow{f_n}) = \overrightarrow{e_1}$.

$h \in O(E)$ puisque l'image de la base (f) par h est une base orthonormée de E.

On a alors pour tout $i, ha(\overrightarrow{e_i}) = h(\mu_i \overrightarrow{f_i}) = \mu_i \overrightarrow{e_k}$ avec $k \neq i$ donc $ha(\overrightarrow{e_i}) \in Vect(\overrightarrow{e_i})^{\bigcirc}$

I.C.2) *Montrer que $\mathcal{H}$ contient au moins un automorphisme orthogonal.*

$\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$, donc de dimension $n^2 - 1$. Soit $a \neq 0 \in \mathcal{L}(E)$ tel que $vect(a)^{\perp} = \mathcal{H}$ et soit h définit comme à la question précédente. On a alors $<< h^*, a >>= Tr(ha)$

or $Tr(ha) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{e_i} \mid ha(\overrightarrow{e_i})) = 0$

donc $h^* \in vect(a)^{\perp} = \mathcal{H}$ or $h^* = h^{-1} \in O(E)$ puisque $O(E)$ est un groupe.

Partie II - Cas où dimE=3

Dans toute cette partie l'espace euclidien E est de dimension 3 et orienté. On se propose de prouver que tout sous espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 7 contient au moins une rotation.

II.A - *Si $\overrightarrow{k} \in E$ est un vecteur unitaire et si $\theta \in \mathbb{R}$, on note $p_{\overrightarrow{k}}$ le projecteur orthogonal d'image $Vect(\overrightarrow{k})$, $\omega_{\overrightarrow{k}}$ l'endomorphisme $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x}$ et $r_{\theta, \overrightarrow{k}}$ la rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{k}$.*

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire et θ un réel.

II.A.1) *Exprimer simplement le produit scalaire $<< a, p_{\overrightarrow{k}} >>$ à l'aide du produit scalaire de deux vecteurs de E.*

Considérons une base orthonormée (g) de E dont le premier vecteur soit égal à $\overrightarrow{k}$:

ainsi si $k \geq 2, p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{g_i}) = \overrightarrow{0}$

$$
\begin{aligned}
< \quad < a, p_{\overrightarrow{k}} >> &== Tr(p^*_{\overrightarrow{k}} a) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{g_i} \mid p^*_k a(\overrightarrow{g_i})) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} (p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{g_i}) \mid a(\overrightarrow{g_i})) = (p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{k}) \mid a(\overrightarrow{k})) = (\overrightarrow{k} \mid a(\overrightarrow{k}))
\end{aligned}
$$

II.A.2) *Exprimer simplement $r_{\theta, \overrightarrow{k}}$ à l'aide de $p_{\overrightarrow{k}}$ et de $\omega_{\overrightarrow{k}}$. En déduire la relation:*

$$<< a, r_{\theta, \overrightarrow{k}} >>= \cos\theta \mathrm{Tr}(a) + (1 - \cos(\theta))(\overrightarrow{k} \mid a(\overrightarrow{k})) + \sin\theta << a, \omega_{\overrightarrow{k}} >> \quad (1)$$

on peut écrire $\forall x \in E$, $x = p_{\overrightarrow{k}}(x) + (x - p_{\overrightarrow{k}}(x))$ avec $p_{\overrightarrow{k}}(x) \in Vect(\overrightarrow{k})$ et $x - p_{\overrightarrow{k}}(x) \in Vect(\overrightarrow{k})^{\bigcirc}$

donc

$$r_{\theta,\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) = r_{\theta,\overrightarrow{k}}(p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) + (\overrightarrow{x} - p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}))) = p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) + r_{\theta,\overrightarrow{k}}(x - p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}))$$

or on a pour tout vecteur $\overrightarrow{y} \in Vect(\overrightarrow{k})^{\bigcirc}$,

$$r_{\theta,\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{y}) = \cos(\theta)\overrightarrow{y} + \sin\theta(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{y})$$

donc

$$\begin{aligned} r_{\theta,\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) &= p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) + \cos(\theta)(x - p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x})) + \sin\theta(\overrightarrow{k} \wedge (\overrightarrow{x} - p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}))) \\ &= p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) + \cos(\theta)(x - p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x})) + \sin\theta(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x}) \end{aligned}$$

Soit :$r_{\theta,\overrightarrow{k}} = (1-\cos\theta)p_{\overrightarrow{k}} + \cos\theta Id + \sin\theta\omega_{\overrightarrow{k}}$. Remarquons que cette formule peut également s'obtenir matriciellement en écrivant les matrices de $p_{\overrightarrow{k}}, \omega_{\overrightarrow{k}}, r_{\theta,\overrightarrow{k}}$ dans une base orthonormée dont le troisième vecteur est $\overrightarrow{k}$, qui sont respectivement $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc

$$\begin{aligned} < &< a, r_{\theta,\overrightarrow{k}} >> = << a, (1-\cos\theta)p_{\overrightarrow{k}} + \cos\theta Id + \sin\theta\omega_{\overrightarrow{k}} >> \\ = &\ (1-\cos\theta)(\overrightarrow{k} \mid a(\overrightarrow{k})) + \cos\theta << Id, a >> + \sin\theta << a, \omega_{\overrightarrow{k}} >> \end{aligned}$$

enfin $<< Id, a >> = Tr(a)$, d'ou la formule demandée.

II.A.3) *Que devient cette relation* (1) *lorsque* $a \in \mathcal{S}(E)$,*lorsque* $a \in \mathcal{A}(E)$?

$\omega_{\overrightarrow{k}} \in \mathcal{A}(E)$: en effet ,$\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$, $(\overrightarrow{x} \mid \omega_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{y})) = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{y}) = [\overrightarrow{x}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{y}]$ et $(\omega_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = [\overrightarrow{y}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}] = -(\overrightarrow{x} \mid \omega_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{y}))$

ou $[.,.,.]$ désigne le produit mixte

donc si $a \in \mathcal{S}(E)$ $<< a, \omega_{\overrightarrow{k}} >> = 0$ .d'après I.A.3

la relation devient donc

$$<< a, r_{\theta,\overrightarrow{k}} >> = \cos\theta \mathrm{Tr}(a) + (1-\cos(\theta))(\overrightarrow{k} \mid a(\overrightarrow{k}))$$

si $a \in \mathcal{A}(E), Tr(a) = 0$ car $\forall x \in E, (x \mid a(x)) = (-a(x) \mid x) = 0$

d'autre part $(\overrightarrow{k} \mid a(\overrightarrow{k})) = (-a(\overrightarrow{k}), \overrightarrow{k}) = 0$

la relation devient donc

$$<< a, r_{\theta, \overrightarrow{k}} >>= \sin\theta << a, \omega_{\overrightarrow{k}} >>$$

II.B - *Dans cette section $s \in \mathcal{S}^+(E)$ est un endomorphisme symétrique positif de rang ≤ 2 et de trace égale à 1 et ν est un endomorphisme non nul de E, mais de trace nulle. On pose $\mathcal{V} = Vect(s,\nu)^\perp$ et on veut montrer que $\mathcal{V} \cap \mathcal{O}^+(E) \neq \emptyset$.*

II.B.1) *Quelle est la dimension de $\mathcal{V}$?*

$\dim(\mathcal{V}) = \dim(L(E)) - \dim(Vect(s,\nu))$ or la famille (s,ν) est libre puisque si $\alpha s + \beta\nu = 0$, $\mathrm{Tr}(\alpha s + \beta \nu) = 0 = \alpha$ donc $\beta\nu = 0$ puis $\beta = 0$ car $\nu \neq 0$

donc $\dim(\mathcal{V}) = 9 - 2 = 7$

II.B.2) *Soit $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de E. Pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1,1\}^3$, on note $\overrightarrow{x_\varepsilon}$ le vecteur $\frac{\varepsilon_1\overrightarrow{e_1}+\varepsilon_2\overrightarrow{e_2}+\varepsilon_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{3}}$. Prouver l'identité*

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3} (\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid s(\overrightarrow{x_\varepsilon})) = \frac{8}{3}$$

$(\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid s(\overrightarrow{x_\varepsilon})) = \frac{1}{3}\sum_{i,j\in\{1,2,3\}^2} \varepsilon_i\varepsilon_j(\overrightarrow{e_i} \mid s(\overrightarrow{e_j}))$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3} (\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid s(\overrightarrow{x_\varepsilon})) &= \frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\sum_{i,j\in\{1,2,3\}^2} \varepsilon_i\varepsilon_j(\overrightarrow{e_i} \mid s(\overrightarrow{e_j})) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\sum_{i\in\{1,2,3\}} (\overrightarrow{e_i} \mid s(\overrightarrow{e_i})) + \frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\sum_{i\neq j\in\{1,2,3\}^2} \varepsilon_i\varepsilon_j(\overrightarrow{e_i} \mid s(\overrightarrow{e_j})) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3} Tr(s) + \frac{1}{3}\sum_{i\neq j\in\{1,2,3\}^2} [\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3} \varepsilon_i\varepsilon_j](\overrightarrow{e_i} \mid s(\overrightarrow{e_j})) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

en effet si $i \neq j$, et $\varepsilon \in \{-1,1\}^3$ on a $\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3} \varepsilon_i\varepsilon_j$ est la somme de 8 réels

correspondant à chacune des 8 triplets $(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k)$. le produit $\varepsilon_i\varepsilon_j$ est égal à 1 dans 4 cas

: $(1,1,1),(1,1,-1),(-1,-1,1),(-1,-1,-1)$ et à -1 dans les quatre autres cas

donc $\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3} \varepsilon_i\varepsilon_j = 0$

finalement

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3} (\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid s(\overrightarrow{x_\varepsilon})) = \frac{8}{3}$$

II.B.3 *Dans cette question seulement, on rajoute l'hypothèse ν symétrique.*

a) *Prouver l'existence d'une base (e) telle que $(\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid \nu(\overrightarrow{x_\varepsilon})) = 0$ pour tout $\varepsilon \in \{-1,1\}^3$.*

puisque ν est symétrique , il est possible de considérer une base orthonormée (e) constituée de vecteurs propres de ν. on a alors

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{x_\varepsilon} \quad | \quad \nu(\overrightarrow{x_\varepsilon})) &= \sum_{i,j\in\{1,2,3\}^2} \varepsilon_i\varepsilon_j(\overrightarrow{e_i} \mid s(\overrightarrow{e_j})) \\
&= \sum_{i,j\in\{1,2,3\}^2} \varepsilon_i\varepsilon_j(\overrightarrow{e_i} \mid \lambda_j\overrightarrow{e_j}) = \sum_{i\in\{1,2,3\}} (\overrightarrow{e_i} \mid \lambda_i\overrightarrow{e_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = Tr\nu = 0
\end{aligned}$$

b) *Démontrer l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{k}$ unitaire vérifiant:*

$$0 \le (\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k})) \le \frac{1}{3} \text{ et } (\overrightarrow{k} \mid \nu(\overrightarrow{k})) = 0$$

en reprenant les notations de la question précédente, il existe $2^3 = 8$ vecteurs $\overrightarrow{x_\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1\overrightarrow{e_1}+\varepsilon_2\overrightarrow{e_2}+\varepsilon_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{3}}$: tous ces vecteurs sont unitaires puisque $\|\overrightarrow{x_\varepsilon}\| = \sqrt{\frac{1+1+1}{3}} = 1$

supposons que pour chacun de ces 8 vecteurs on ait l'inégalité $(\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid \nu(\overrightarrow{x_\varepsilon})) > \frac{1}{3}$

dans ce cas $\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}(\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid s(\overrightarrow{x_\varepsilon})) > \frac{8}{3}$, ce qui est faux donc nécéssairement il existe au moins un $\varepsilon \in \{-1,1\}^3$tel que $(\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid s(\overrightarrow{x_\varepsilon})) \le \frac{1}{3}$.

on a de plus $(\overrightarrow{x_\varepsilon} \mid s(\overrightarrow{x_\varepsilon})) \ge 0$ puisque $s \in \mathcal{S}^+(E)$.

Posons donc $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{x_\varepsilon}$.

On a alors d'après a) $(\overrightarrow{k} \mid \nu(\overrightarrow{k})) = 0$

c) *Etablir l'existence de $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que $r_{\theta,\overrightarrow{k}} \in \mathcal{V}$*

On cherche $r_{\theta,\overrightarrow{k}}$ tel que $<< r_{\theta,\overrightarrow{k}}, s >>=<< r_{\theta,\overrightarrow{k}}, \nu >>= 0$

d'après II.A.3) celà revient à $\cos\theta \mathrm{Tr}(s) + (1-\cos(\theta))(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k})) = \cos\theta + (1-\cos(\theta))(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k})) = 0$ (*)

et $\cos\theta \mathrm{Tr}(\nu) + (1-\cos(\theta))(\overrightarrow{k} \mid \nu(\overrightarrow{k})) = 0$ (**)

en choisissant $\overrightarrow{k}$ comme dans b) et puisque $\mathrm{Tr}(\nu) = 0$, la relation (**) est vérifiée

il reste alors à choisir θ de telle sorte que $\cos\theta(-1+(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))) = (\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))$

soit

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))}{-1+(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))} = 1 + \frac{1}{(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))-1}$$

Rem: $(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))) \leq \frac{1}{3}$ donc $-1+(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k})) \neq 0$

la fonction $h : t \mapsto 1+\frac{1}{t-1}$ est décroissante, de $[0, \frac{1}{3}]$ dans $[\frac{-1}{2}, 0]$: donc puisque

$$(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k})) \in [0, \frac{1}{3}] \text{ on en déduit que } \frac{(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))}{-1+(\overrightarrow{k} \mid s(\overrightarrow{k}))} \in [\frac{-1}{2}, 0]$$

et donc il est possible de trouver un réel $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ tel que $\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{k}|s(\overrightarrow{k}))}{-1+(\overrightarrow{k}|s(\overrightarrow{k}))}$ (en fait $\theta = Arc\cos(\frac{(\overrightarrow{k}|s(\overrightarrow{k}))}{(\overrightarrow{k}|s(\overrightarrow{k}))-1}))$

pour cette valeur de θ, on a donc $<< r_{\theta,\overrightarrow{k}}, s >>=<< r_{\theta,\overrightarrow{k}}, \nu >>= 0$ et donc $r_{\theta,\overrightarrow{k}} \in \mathcal{V}$

II.B.4 *On décompose maintenant ν sous la forme $\nu_1 + a$ ou ν_1 est symétrique et a antisymétrique. On choisit $\overrightarrow{k_1}$ unitaire tel que*

$$0 \leq (\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1})) \leq \frac{1}{3} \text{ et } (\overrightarrow{k} \mid \nu_1(\overrightarrow{k_1})) = 0$$

a) *Dans la suite on posera pour tout x réel:*

$$sgn(x) = 1 si\ x \geq 0, -1 sinon.$$

On note $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de vecteurs propres de s et l'on pose :

$$\overrightarrow{k_i} = a_i\overrightarrow{e_1} + b_i\overrightarrow{e_2} + c_i\overrightarrow{e_3} pour\ i = 1, 2$$

Démontrer l'existence d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{k_2}$ tel que $r_{\pi,\overrightarrow{k_2}}$ soit orthogonale à s pour $<< . >>$ et que les composantes de $\overrightarrow{k_2}$ dans une base de diagonalisation de s soient de même signes que celles de $\overrightarrow{k_1}$

Puisque $Trs = 1$ et $rg(s) \leq 2$, 0 est valeur propre de s et la somme des valeurs propres est égale à 1, et de plus elles sont positives. Organisons les vecteurs propres de (e) de telle sorte que les valeurs propres associées soient $\lambda, 1-\lambda, 0$ avec $\lambda \in [0,1]$

soit $\overrightarrow{k_2}$ un vecteur unitaire: on a

$$<< r_{\pi,\overrightarrow{k_2}}, s >>= \cos(\pi)Tr(s)+(1-\cos\pi)((\overrightarrow{k_2} \mid s(\overrightarrow{k_2})) = -1+2((\overrightarrow{k_2} \mid s(\overrightarrow{k_2}))$$

or $((\overrightarrow{k_2} \mid s(\overrightarrow{k_2})) = (a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3} \mid \lambda a_2\overrightarrow{e_1}+(1-\lambda)b_2\overrightarrow{e_2}) = \lambda a_2^2+(1-\lambda)b_2^2$

en supposant que $|a_2| = |b_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $c_2 = 0$,on a $((\overrightarrow{k_2} \mid s(\overrightarrow{k_2})) = \frac{1}{2}$ et donc

$$<< r_{\pi,\overrightarrow{k_2}}, s >>= 0$$

et de plus $\overrightarrow{k_2}$ est bien unitaire

il suffit alors d'ajuster les signes de a_2 et b_2 pour qu'il correspondent à ceux de a_1 et de b_1

nous supposerons quitte à changer $\overrightarrow{k_1}$ en son opposé que $c_1 \geq 0$, ainsi $sgn(c_2) = sgn(c_1)$

b) *justifier l'existence d'une fonction $t \mapsto \overrightarrow{k(t)}$ de $[0,1]$ dans E et d'une fonction $t \mapsto \theta(t)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes:*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{k(t)} &= a(t)\overrightarrow{e_1}+b(t)\overrightarrow{e_2}+c(t)\overrightarrow{e_3} \text{ avec} \\
a(t) &= sgn(a_1)\sqrt{2ta_2^2+(1-2t)a_1^2} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2 \text{ },a(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1 \\
b(t) &= sgn(b_1)\sqrt{2tb_2^2+(1-2t)b_1^2} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2 \text{ },b(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1 \\
c(t) &= sgn(c_1)\sqrt{2tc_2^2+(1-2t)c_1^2} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2 \text{ },c(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1 \\
\theta(t) &= Arc\cos(\frac{(\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)}))}{(\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)})-1}) \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2 \text{ },2\pi-\theta(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1
\end{aligned}$$

La fonction $\overrightarrow{k(.)}$ est ainsi bien définie sur $[0,1]$

en effet si $0 \leq t \leq 1/2$,$2ta_2^2+(1-2t)a_1^2 \geq 0$ et si $1/2 < t \leq 1$, alors $1-t \in]0,1/2]$

de même pour $b(t)$ et $c(t)$

Remarque pour la suite: la fonction $\overrightarrow{k(.)}$ est également continue sur $[0,1]$ car a, b, c le sont

en effet $t \mapsto a(t) = \sqrt{2ta_2^2 + (1-2t)a_1^2}$ est continue sur $[0,1/2]$

$t \mapsto a(t) = a(1-t)$ est continue sur $]1/2,1]$

enfin $\lim_{t\mapsto 1/2^+} a(t) = \lim_{t\mapsto 1/2^+} a(1-t) = \lim_{T\mapsto 1/2^-} a(T) = a(1/2)$

ainsi a est C^0 sur $[0,1]$ de même pour b et c

supposons $t \in [0,1/2]$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{k(t)} \quad | \quad s(\overrightarrow{k(t)}) &= (a(t)\overrightarrow{e_1} + b(t)\overrightarrow{e_2} + c(t)\overrightarrow{e_3} \mid a(t)\lambda\overrightarrow{e_1} + b(t)(1-\lambda)\overrightarrow{e_2}) \\
&= \lambda a(t)^2 + (1-\lambda)b(t)^2 \\
&= \lambda(2ta_2^2 + (1-2t)a_1^2) + (1-\lambda)(2tb_2^2 + (1-2t)b_1^2) \\
&= 2t(\overrightarrow{k_2} \mid s(\overrightarrow{k_2}) + (1-2t)(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1})
\end{aligned}$$

de plus $(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1}) \in [0, \frac{1}{3}]$ et $(\overrightarrow{k_2} \mid s(\overrightarrow{k_2}) = \frac{1}{2}$ donc $(\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)})$ est le barycentre de $(\overrightarrow{k_2} \mid s(\overrightarrow{k_2})$ avec la masse $2t \geq 0$ et de $(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1})$ avec la masse $1-2t \geq 0$

donc $(\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)}) \in [(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1}), 1/2] \subseteq [0,1/2]$

On en déduit que $\frac{(\overrightarrow{k(t)}|s(\overrightarrow{k(t)}))}{(\overrightarrow{k(t)}|s(\overrightarrow{k(t)}))-1} = 1 + \frac{1}{(\overrightarrow{k(t)}|s(\overrightarrow{k(t)}))-1}$ varie , lorsque t parcourt $[0,1/2]$, dans l'intervalle $[-1, \frac{(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1}))}{(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1}))-1}] \subseteq [-1,0]$ (il s'agit même d'une bijection strictement décroissante)

Ainsi la fonction $\theta : t \mapsto \theta(t) = Arc\cos(\frac{(\overrightarrow{k(t)}|s(\overrightarrow{k(t)}))}{(\overrightarrow{k(t)}|s(\overrightarrow{k(t)}))-1})$ est bien définie et continue sur $[0,1/2]$. par définition la fonction θ est également continue sur $]1/2,1]$.

de plus on remarque que $\theta(1/2) = ar\cos(-1) = \pi$, et

$$\lim_{t\mapsto 1/2^+} \theta(t) = \lim_{t\mapsto 1/2^+} 2\pi - \theta(1-t) = \lim_{T\mapsto 1/2^-} 2\pi - \theta(T) = 2\pi - \theta(1/2) = \pi = \theta(1/2)$$

donc la fonction θ est continue sur $[0,1]$ et admet le tableau de variation suivant :

- pour $t \in [0,1/2]$ elle croit de $Arc\cos\frac{(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1}))}{(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1}))-1}$ à π
- pour $t \in]1/2,1]$ elle croit de π à $2\pi - Arc\cos\frac{(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1}))}{(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1}))-1}$

c) *Vérifier que* $\overrightarrow{k}(t)$ *est unitaire et que* $\rho(t) = r_{\theta(t),\overrightarrow{k(t)}}$ *est orthogonale à* s *pour* $<<,>>$.

Si $t \in [0,1/2]$, $\left\|\overrightarrow{k(t)}\right\| = 2t(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + (1-2t)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 1$ car les vecteurs $\overrightarrow{k_i}$ sont unitaires

de plus

$$\begin{aligned}
< \quad < \rho(t), s >> \quad &= \cos(\theta(t)) + (1 - \cos(\theta(t))(\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)})) \\
< \quad < \rho(t), s >> &= \cos(\theta(t))(1 - (\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)})) + (\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)})) \\
< \quad < \rho(t), s >> &= \frac{(\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)}))}{(\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)}) - 1}(1 - (\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)})) + (\overrightarrow{k(t)} \mid s(\overrightarrow{k(t)})) \\
< \quad < \rho(t), s >> &= 0
\end{aligned}$$

d) *Montrer que la fonction* $t \mapsto << \rho(t), \nu >>$ *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est continue. Etudier les signes de* $<< \rho(0), \nu >>$ *et de* $<< \rho(1), \nu >>$ *et prouver qu'il existe* t *tel que* $\rho(t) \in \mathcal{V}$

Par hypothèses, $\nu = \nu_1 + a$ avec ν_1 symétrique et a antisymétrique . On a donc

$Tr(\nu) = 0 = Tr(\nu_1) + Tr(a) = 0$ or $Tr(a) = 0$ donc $Tr(\nu_1) = 0$

$$\begin{aligned}
< \quad < \rho(t), \nu >> &= << \rho(t), \nu_1 + a >> = << \rho(t), \nu_1 >> + << \rho(t), a >> \\
< \quad < \rho(t), \nu >> &= (1 - \cos(\theta(t))(\overrightarrow{k(t)} \mid \nu_1(\overrightarrow{k(t)})) + \sin(\theta(t)) << a, \omega_{\overrightarrow{k(t)}} >>
\end{aligned}$$

or la fonction θ et la fonction $\overrightarrow{k}$ sont continues sur $[0,1]$ d'après $b)$

l'application $t \mapsto << a, \omega_{\overrightarrow{k(t)}} >> = -\sum_{i=1}^{3}(\overrightarrow{k(t)} \wedge a(e_i) \mid \overrightarrow{e_i})$ est elle aussi continue sur $[0,1]$ puisque l'application $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$ est continue sur de E dans E et l'application $\overrightarrow{x} \to (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$ est continue de E dans $\mathbb{R}$. donc $t \mapsto << \rho(t), \nu >>$ est continue

de plus

$$\overrightarrow{k(0)} = \overrightarrow{k_1}, \theta(0) = Arc\cos\left(\frac{(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1}))}{(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1})) - 1}\right)$$

et

$$\overrightarrow{k(1)} = \overrightarrow{k_1}, \theta(1) = 2\pi - Arc\cos\left(\frac{(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1}))}{(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1})) - 1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
< & < \rho(0),\nu >>= (1-\cos(\theta(0))(\overrightarrow{k(0)} \mid \nu_1(\overrightarrow{k(0)})) + \sin(\theta(0)) << a, \omega_{\overrightarrow{k(0)}} >> \\
< & < \rho(0),\nu >>= (1-\frac{(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1}))}{(\overrightarrow{k_1} \mid s(\overrightarrow{k_1}))-1})((\overrightarrow{k_1} \mid \nu_1(\overrightarrow{k_1})) + \sin(\theta(0)) << a, \omega_{\overrightarrow{k_1}} >> \\
< & < \rho(0),\nu >>= \sin(\theta(0)) << a, \omega_{\overrightarrow{k_1}} >>
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
< & < \rho(1),\nu >>= (1-\cos(\theta(1))(\overrightarrow{k(1)} \mid \nu_1(\overrightarrow{k(1)})) + \sin(\theta(1)) << a, \omega_{\overrightarrow{k(1)}} >> \\
< & < \rho(1),\nu >>= \sin(\theta(1)) << a, \omega_{\overrightarrow{k(1)}} >>= - << \rho(0),\nu >>
\end{aligned}
$$

ainsi $<< \rho(0),\nu >>$ et $<< \rho(1),\nu >>$ sont de signes contraire. Par continuité , il existe donc $t \in [0,1]$ tel que $<< \rho(t),\nu >>= 0$

comme de plus $<< \rho(t), s >>= 0$ on en déduit que $\rho(t) \in \mathcal{V}$

II.C- Cas général

II.C.1) *En utilisant le résultat de la question I.B.2, prouver que tout sous espace vectoriel de dimension 7 de $\mathcal{L}(E)$ contient au moins un automorphisme orthogonal.*

Soit F un sous espace de dimension 7 de $\mathcal{L}(E)$, qui est de dimension 9. $F^\perp$ est alors de dimension 2.

Montrons qu'il existe dans $F^\perp$ un endomorphisme de rang r tel que $1 \leq r \leq 2$.

$F^\perp = Vect(a,b)$ avec $a, b \neq 0$ et libres. Si b n'est pas bijectif , $rang(b) \leq 2$ et $rang(b) \geq 1$, sinon soit $c = -a + \lambda b$

$\det(c) = \det(b)\det(-b^{-1}a + \lambda I)$, or l'endomorphisme $b^{-1}a$ de E admet au moins une valeur propre (l'espace est de dimension 3 et tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle) donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(-b^{-1}a + \lambda I) = 0 = \det(c)$ et donc $rang(c) \leq 2$ avec $c \in F^\perp$. de plus $c \neq 0$ puisque la famille a, b est libre

d'après I.B.2, il existe $u \in O(E)$ tel que $s' = uc \in \mathcal{S}^+(E)$ et $Tr(s') > 0$

On a alors $F = [Vect(u^{-1}s', b)]^\perp = [Vect(u^{-1}s', u^{-1}ub)]^\perp$

remarquons que pour tout a, b, $<< a, b >>= Tr(a^*b) = Tr(a^*u^*ub) =<< ua, ub >>$

or

$$
\begin{aligned}
z \quad \in & \quad F \Leftrightarrow << z, u^{-1}s' >>=<< z, u^{-1}ub >>= 0 \\
\Leftrightarrow & \quad << uz, s' >>=<< uz, ub >>= 0 \Leftrightarrow uz \in [Vect(s', ub)]^\perp
\end{aligned}
$$

notons que $rang(s') = rang(uc) = rang(c) = 2$

posons $s = \frac{1}{Tr's')}s'$. s est de même rang que s', de trace égale à 1 et $s \in \mathcal{S}^+(E)$

$$Vect(s', ub) = Vect(s, ub) = Vect(s, ub - Tr(ub)s)$$

posons $\nu = ub - Tr(ub)s$. $\nu \neq 0$ et $Tr(\nu) = 0$

On est ainsi ramené à II.B: Il existe donc une rotation ρ telle que $\rho \in Vect(s, \nu)^{\perp}$

donc $\rho \in Vect(s', ub)^{\perp}$. Soit $z = u^{-1}\rho$

on a $uz \in Vect(s', ub)^{\perp}$ donc $z \in F$. Or z est bien un élément du groupe orthogonal comme composé de deux automorphismes orthogonaux.

II.C.2) *Un sous-espace vectoriel de dimension* 6 *de* $\mathcal{L}(E)$ *contient-il toujours un automorphisme de* E

Non , il suffit pour le prouver de considérer le sous-espace *de* $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes f de E de matrice M dans la base canonique: $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$.

Il s'agit bien d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 6 , engendré par les endomorphismes de matrices canoniques $E_{i,j}$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2\}$. Dans ce sous espace il n'existe aucun automorphisme puisque pour tout $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6, \det(f) = \det(M) = 0$.