D.M. 12 : Conditionnement d'une matrice, cas des matrices symétriques réelles

Pour le lundi 6 février 2023

Avertissement : Dans ce problème, on identifie $\mathbb{K}^n$ avec $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on écrira donc le produit $A.x$ en interprétant x comme une matrice colonne. Pour les calculs on utilisera le package `numpy.linalg` avec la documentation du Concours Centrale.

Partie I : Un exemple d'introduction

Quand on étudie un système linéaire de n équations à n inconnues à coefficients reeels ou complexes, on peut se poser la question suivante : si $x \in \mathbb{K}^n$ est l'unique solution du système $Ax = b$, avec A inversible comment sera modifiée cette solution si les coefficients du second membre ou de la matrice sont modifiés ?

Q1) Considérons par exemple le système $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Déterminer, à l'aide de numpy, l'unique solution x de ce système. (Par défaut numpy travaille avec des flottants, ce qui suffira ici.)

On modifie le second membre en :

$$b' = b + \delta = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \quad \text{où on note } \delta := \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Q2) Déterminer avec numpy :

a) la solution x' du système $Ax' = b'$.

b) l'écart relatif $||x' - x||/||x||$ et l'écart relatif $||b' - b||/||b||$ en prenant pour norme des vecteurs la norme euclidienne canonique.

Q3) De même si on perturbe la matrice en prenant :

$$A' = A + \Delta = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}$$

en gardant le second membre initial, calculer la nouvelle solution x'' et l'écart relatif entre x'' et x

Le théorème et la définition qui suivent permettent d'étudier plus en détail ce phénomène. Pour le formuler, rappelons que si $|| \ ||$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$, l'égalité :

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

définit une norme $A \mapsto ||A||$ sur $M_n(\mathbb{K})$ dite norme matricielle induite par la norme sur $\mathbb{K}^n$ (ou subordonnée à cette norme). C'est la norme de l'application linéaire $x \mapsto Ax$.

Partie II : Théorème et définition du conditionnement

Théorème 1 : Soient $x \mapsto \|x\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, $A \mapsto \|A\|$ la norme matricielle induite, A une matrice dans $GL_n(\mathbb{K})$ et x dans $\mathbb{K}^n$ solution du système $Ax = b$. Si x' est la solution du système perturbé $Ay = b'$, on a alors :

$$\frac{\|x' - x\|}{\|x\|} \leq \|A\|.\|A^{-1}\| \frac{\|b' - b\|}{\|b\|}.$$

Si x'' est la solution d'un système perturbé $A'y = b$, on a alors :

$$\frac{\|x'' - x\|}{\|x''\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|A' - A\|}{\|A\|}.$$

Q4) Démontrer le théorème 1. On pourra d'abord montrer que $\|x' - x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|b' - b\|$.

Le théorème 1 amène à poser la définition suivante :

Définition 1 : Soit $A \mapsto \|A\|$ une norme matricielle induite par une norme vectorielle $x \mapsto \|x\|$. Si A est une matrice réelle ou complexe inversible, alors le conditionnement de A relativement à cette norme est la quantité :

$$\text{cond }(A) = \|A\|. \left\|A^{-1}\right\|.$$

Remarque 1 : Le conditionnement n'est défini que pour une matrice inversible et dépend du choix d'une norme matricielle subordonnée.

On notera $\text{cond}_\infty, \text{cond}_1$ et cond_2 les conditionnements associés respectivement aux trois normes classiques de $\mathbb{K}^n$.

Q5) **Calcul de la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique :** si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note $||M||_2$ la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer que si M est une matrice symétrique réelle alors :

$$||M||_2 = \rho(M).$$

où $\rho(M)$ est le rayon spectral de M i.e. $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(M)\}$.

Sparadrap pour les 3/2 : on va montrer en cours que *toutes les matrices symétriques réelles sont diagonalisables dans une base orthonormée.* Autrement dit il existe une b.o.n. $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Me_i = \lambda_i e_i$.

Q6) La matrice A de la **Q1** est symétrique réelle. Calculer, à l'aide de numpy, les 4 valeurs propres de A et en déduire son conditionnement $\text{cond}_2(A)$ pour la norme euclidienne canonique.

Q7) Des propriétés immédiates du conditionnement :
Soit $A \mapsto \|A\|$ une norme matricielle induite par une norme vectorielle $x \mapsto \|x\|$. Pour toute matrice inversible A à coefficients réels complexes, montrer que :

a) $\text{cond}(A) \in [1, +\infty[$

b) $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$

c) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}^*,\ \text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$.

Remarque : un système de Cramer $Ax = b$ sera dit *bien conditionné* si $\text{cond}(A)$ est proche de 1 et mal conditionné si $\text{cond}(A)$ est proche de $+\infty$. Evidemment le mot « proche » ne veut rien dire en soi... mais disons que l'exemple de la Q6 n'est pas assez « proche » de 1.

Partie III : Formules pour le conditionnement en norme euclidienne (cas réel)

La propriété de la question suivante est très importante, elle est traitée aussi à l'exercice 12 de la planche R4 :

Q8) Expression de la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique :

a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique *positive* c'est-à-dire (cette déf. sera donnée dans le cours) telle que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$. On note $(x|y)$ le p.s. canonique de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\|S\|_2 = \max_{\|x\|=1}(Sx|x)$$

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque qu'on pourra supposer non nulle.
En appliquant la question précédente à $S = A^\top.A$, montrer que :

$$\|A^\top.A\|_2 = \|A\|_2^2$$

En déduire aussi que $\|A\|_2 = \|A^\top\|_2$.

c) En déduire que $\|A\|_2^2 = \rho(A^\top.A)$.

Q9) Pour une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque les valeurs propres ordonnées $0 < \mu_{\min} < \cdots < \mu_{\max}$ de la matrice symétrique (définie positive) $A^\top.A$ sont appelées *valeurs singulières* de A.
Montrer que :

$$\mathrm{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}}.$$

Dans le cas particulier où A est symétrique positive, exprimer $\mathrm{cond}_2(A)$ directement à l'aide des valeurs propres de A.

Q10) Combien vaut $\mathrm{cond}_2(A)$ si $A \in O_n(\mathbb{R})$?

Partie IV : Le conditionnement et la continuité des valeurs propres

Comme on vient d'étudier comme les solutions x de $Ax = b$ évoluent par perturbation, pn peut se demander comment *le spectre* d'une matrice évolue par perturbation, et là encore le conditionnement apparaît dans le :

Théorème de Bauer-Fike (1960) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $E \in M_n(\mathbb{C})$ quelconque. Soit μ une valeur propre de $A + E$. Alors la distance entre μ et $\mathrm{Sp}(A)$ vérifie :

$$d(\mu, \mathrm{Sp}(A)) \leq \mathrm{cond}(P)\|E\|,$$

où P est la matrice d'une base de vecteurs propres de A.

Plutôt que de démontrer ce théorème général ici (voir Wikipédia), on va s'intéresser au cas des matrices A symétriques où l'on va, mieux, pouvoir suivre continûment chaque valeur propre par perturbation. Pour cela, on démontre un résultat qui a bien d'autres applications :

Partie IV-1 : théorème de Courant-Fischer

Notation : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle quotient de Rayleigh associé à cette matrice l'application :

$$R_A : x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \longmapsto R_A(x) = \frac{\langle Ax \mid x\rangle}{\|x\|_2^2}$$

Soit A une matrice symétrique réelle de valeurs propres :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres associés avec, pour tout entier k compris entre 1 et n, $Ae_k = \lambda_k e_k$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$V_k := \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)^\perp$$

Q11) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$\left\{ \lambda_k = \sup\{R_A(x) \mid x \in V_k \setminus \{0\}\}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \inf\{R_A(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \\ \lambda_k = \inf\{R_A(x) \mid x \in V_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}\} \quad (2 \leq k \leq n) \end{array}\right.$$

(On pourra ne montrer que les égalités sur les sup., la preuve du résultat sur les inf. étant analogue).

Q12) Dans cette question, on obtient une autre caractérisation des λ_i qui ne fait plus références aux e_i.

Notation : Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on désigne par E_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout s.e.v. V de $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\mu_A(V) = \sup\{R_A(x), x \in V \setminus \{0\}\}$$

On va démontrer le :

Théorème : (Courant-Fischer) Soit A une matrice symétriques réelle de valeurs propres : $$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$ alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $$\lambda_k = \inf\{\mu_A(V) \mid V \in E_k\}$$

Pour démontrer ce théorème, on note provisoirement $\alpha_k = \inf\{\mu_A(V) \mid V \in E_k\}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k \leq \lambda_k$.

b) Soit $V \in E_k$, montrer que $V \cap V_{k-1}^{\perp} \neq \{0\}$.

c) Montrer que pour $y \in V \cap V_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}$:

$$\lambda_k \leq R_A(y) \leq \mu_A(V)$$

d) Conclure qu'on a bien l'égalité $\alpha_k = \lambda_k$.

Partie IV-2 : application à la continuité des v.p.

Q13) Le but de cette partie est de démontrer le théorème de continuité suivant :

Soit $A : [a,b] \longmapsto S_n(\mathbb{R})$ une application continue. Si pour tout t dans $[a,b]$ on note : $$\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \ldots \leq \lambda_n(t)$$ les valeurs propres de $A(t)$ rangées dans l'ordre croissant, alors les fonctions λ_k sont continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$

Notation : Pour $t \in [a,b]$, soit $(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$ une base orthonormale de vecteurs propres de $A(t)$, avec : $A(t)e_k(t) = \lambda_k(t)e_k(t)$.

On note $V_k(t) = \text{Vect}(e_1(t), \ldots, e_k(t)) = \text{Vect}(e_{k+1}(t), \ldots, e_n(t))^{\perp}$.

Soient t_0 et t deux éléments de $[a,b]$. Montrer que :

a) $\lambda_k(t) \leq \mu_{A(t)}(V_k(t_0))$ puis que :

b) $\lambda_k(t) \leq \lambda_k(t_0) + \delta_k(t_0)$ où $\delta_k(t_0) := \sup\left\{R_{A(t)-A(t_0)}(x) \mid x \in V_k(t_0) - \{0\}\right\}$

c) Montrer d'autre part que : $\delta_k(t_0) \leq \|A(t) - A(t_0)\|_2$

d) en déduire que :

$$|\lambda_k(t) - \lambda_k(t_0)| \leq \|A(t) - A(t_0)\|_2$$

et la conclusion.