D.M. 12 : Conditionnement d'une matrice : solution

Q1) Avec le code ci-dessous :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
# Q1
A=np.array([[10 , 7 , 8 , 7 ],
[7 , 5 , 6 , 5 ],
[8 , 6 , 10 , 9 ],
[7 , 5 , 9 , 10]])
b=np.array([32,23,33,31])
Ainv=alg.inv(A)
x=np.dot(Ainv,b)
print(x)
>>>[1. 1. 1. 1.]
```

Q2) a) Pour le système perturbé, on calcule :

```
delta=np.array([0.1,-0.1,0.1,-0.1])
bprime=b+delta
xprime=np.dot(Ainv,bprime)
print(xprime)
>>>[  9.2 -12.6   4.5  -1.1]
```

b) Pour le calcul des écarts relatifs :

```
def norme(x):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+x[i]**2
    return s**(1/2)
def ecart(xp,x):
    return norme(xp-x)/norme(x)
print(ecart(xprime,x))
print(ecart(bprime,b))
8.198475468036312
0.0033319453118976702
```

Autrement dit, pour un écart relatif de $0,3$ % entre b' et b, on obtient un écart relatif de 820% entre x' et x !

Q3) Avec les mêmes calculs, on obtient resp. pour le vecteur x' et l'écart relatif :

```
[-81. 137. -34.  22.]
81.98475468043931
```

soit un écart relatif de 8000%.

Q4) A partir des égalités $Ax' = b'$ et $Ax = b$, on obtient par différence : $A(x' - x) = b' - b$ puis que $x' - x = A^{-1}(b' - b)$.
Par déf. de la norme d'opérateur, on a alors :

$$||x' - x|| \leq ||A^{-1}||.||b' - b||. \tag{1}$$

D'autre part avec $b = Ax$, on a $||b|| \leq ||A||.||x||$, donc

$$\frac{1}{||x||} \leq \frac{||A||}{||b||}. \tag{2}$$

En multipliant membre à membre les deux inégalités précédentes (tout est positif), on obtient bien :

$$\boxed{\frac{\|x'-x\|}{\|x\|} \leq \|A\|.\|A^{-1}\|\frac{\|b'-b\|}{\|b\|}.}$$

De même, avec $A'x'' = b$ qu'on écrit $(A+\Delta).x'' = b$ et donc $Ax'' = b - \Delta x''$ et en remplaçant b par Ax, on a : $Ax'' = Ax - \Delta x''$ et donc :

$$A(x''-x) = -\Delta x''$$

et finalement :

$$x''-x = -A^{-1}\Delta x''.$$

En passant aux normes et par déf. des normes d'opérateur :

$$||x'-x|| \leq ||A^{-1}||.\ ||\ A'-A||.||x''||$$

ce qui donne exactement l'inégalité voulue où les facteurs $||A||$ au numérateur et dénominateurs sont décoratifs :

$$\frac{\|x''-x\|}{\|x''\|} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|A'-A\|}{\|A\|}.$$

Q5) Soit $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les v.p. toutes réelles de M répétées suivant leur multiplicités et $e_1, \dots, e_n$ une b.o.n. de vecteurs propres associés.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, en écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$Mx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n., on a :

$$||Mx||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \rho(M)^2 (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \rho(M)||x||^2$$

Cette inégalité prouve :

$$||M|| \leq \rho(M)$$

Mais si on fixe un indice i tel que $|\lambda_i| = \rho(M)$, on a $||Me_i|| = |\rho(M)|$ d'où l'égalité :

$$||M|| = \rho(M).$$

Q6) Avec les commandes Python :

```
L=alg.eigvals(A)
rho=max(abs(L))
print(L)
print(rho)
```

On obtient la liste des v.p. et le rayon spectral :

```
[3.02886853e+01 3.85805746e+00 1.01500484e-02 8.43107150e-01]
30.2886853458021
```

Ensuite les v.p. de A^{-1} étant les inverses des v.p. de A, on calcule aussi $\rho(A^{-1})$ et $\text{cond}(A)$.

```
M=1/L # toutes les opérations se font entrées par entrées en np.
rho2=max(abs(M))
print(rho*rho2)
```

et on trouve $\text{cond}_2(A) \simeq 2984$, ce qui est « grand » au sens de la question 7.

Q7) a) Comme $A.A^{-1} = I$ on a $1 = ||I|| \leq ||A||.||A^{-1}||$ et donc $\text{cond}(A) \geq 1$.
b) Si on remplace A par A^{-1} dans la déf. 1 le second membre ne change pas.
c) Comme $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ la encore le second membre de la déf. 1 ne change pas quand on remplace A par αA.

Q8) a) On ordonne le spectre de S en $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ répétées suivant leur multiplicités et $e_1, \ldots, e_n$ une b.o.n. de vecteurs propres associés. Bien sûr $\rho(S) = \lambda_n$.
Alors comme à la question 5), pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$(S(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

d'où l'encadrement :

$$\forall\, x \ \in \mathbb{R}^n, \quad (S(x)|x) \leq \lambda_n ||x||^2.$$

et donc

$$\sup_{||x||=1} (Sx|x) \leq \lambda_n$$

D'autre part, pour $x = e_n$, on a $(Se_n|e_n) = \lambda_n ||e_n||^2 = \lambda_n$ donc on a bien montré que :

$$\max_{||x||=1} (Sx|x) = \lambda_n = \rho(S).$$

D'autre part, à la Q5, on a déjà montré que $\rho(S) = ||S||_2$.
b) Pour $S = A^\top.A$, on vérifie d'abord que S est bien symétrique car $S^\top = (A^\top.A)^\top = (A)^\top(A^\top)^\top. = A^\top A = S$ et positive car si x est un vecteur propre de S et λ v.p. associée $A^\top Ax = \lambda x$ donne $x^\top A^\top A.x = \lambda x^\top.x$ avec $x^\top.x = ||x||^2$ et $x^\top A^\top Ax = ||A.x||^2$ donc $\lambda \geq 0$.
On peut donc appliquer le a) à $S = A^\top.A$:

$$(Sx|x) = (A^\top Ax|x) = (Ax|Ax)$$

Donc :

$$\max_{||x||=1} (Sx|x) = \max_{||x||=1} \ ||Ax||^2$$

Donc par a) et la déf. de $||A||_2$, on a bien

$$\boxed{||S||_2 = ||A||_2^2 \text{ autrement dit : } ||A^\top.A||_2 = ||A||_2^2}$$

Pour le *en déduire* : on la norme d'opérateur sans l'indice$_2$ pour alléger. On sait que la norme d'opérateur est multiplicative i.e.

$$||A^\top.A|| \ \leq ||A^\top||.\ ||A||$$

Donc avec l'égalité encadrée on obtient :

$$||A||^2 \leq ||A^\top||.||A||$$

et donc comme $||A|| \neq 0$ car A n'est pas la matrice nulle on en déduit que :

$$||A|| \leq ||A^\top||$$

Mais en appliquant ce qui précède en remplaçant A par $A^\top$ on obtient l'inégalité en sens inverse d'où

$$\boxed{||A|| = ||A^\top||}$$

c) On sait par b) que $||A||_2^2 = ||A^\top.A||_2$ et par 5) que $||A^\top.A|| = \rho(A)$ d'où la conclusion.

Q9) On a montré que $||A||^2 = ||A^\top.A||$ et que pour la matrice sym. positive $A^\top.A$, de valeurs propres :

$$0 < \mu_1 = \mu_{\min} \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n = \mu_{\max}$$

on a $||A^\top.A|| = \mu_{\max}$. Donc

$$||A|| = \sqrt{\mu_{\max}} \tag{3}$$

De même pour $||A^{-1}||^2 = ||(A^{-1})^\top.A^{-1}|| = ||(A.A^\top)^{-1}||$.

Mini-lemme : Si A est une matrice inversible alors AB et BA sont semblables donc $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

Dém. du lemme : $AB = A(BA)A^{-1}$ □

Application ici : $A.A^\top$ a le même spectre que $A^\top.A$ donc on sait que le spectre de $(A.A^\top)^{-1}$ est formée des réels strmt positifs $1/\mu_n \leq \cdots \leq 1/\mu_1$.

Donc $\rho(A.A^\top)^{-1}) = \dfrac{1}{\mu_1}$ et Donc

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\min}}} \tag{4}$$

Avec (3) et (4) on obtient bien :

$$\boxed{\mathrm{cond}_2(A) \stackrel{def}{=} ||A||.||A^{-1}|| = \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}}.}$$

Si A est symétrique positive alors $A^\top.A = A^2$ et si on a note $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les v.p. de A alors $\mu_k = \lambda_k^2$ pour tout k. Mieux par positivité, $\lambda_k = \sqrt{\mu_k}$.

$$\boxed{\text{Donc pour } A \text{ symétrique positive } \mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$$

Q10) Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $A^\top.A = I$ et donc $\mu_{\max} = \mu_{\min} = 1$ et $\boxed{\mathrm{cond}_2(A) = 1}$.

Moralité : une matrice orthogonale est très bien conditionnée : le système $Ax = b$ est stable numériquement car $x = A^\top.b$ sans aucun calcul d'inverse qui provoquerait des instabilités.

Q11) Soit $x \in V_k \setminus \{0\}$, qu'on décompose en $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$. Alors :

$$R_A(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2}{||x||_2^2} \leq \frac{\lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2}{||x||_2^2} = \lambda_k \tag{5}$$

D'autre part pour $x = e_k$, on a l'égalité $R_A(x) = \lambda_k$ ce qui avec (5) achève de prouver que :

$$\lambda_k = \sup\{R_A(x),\ x \in V_k \setminus \{0\}\}$$

Q12)

a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, comme $V_k \in E_k$ et que par la **Q11)** $\lambda_k = \mu_A(V_k)$, on a bien, par déf. de l'inf. :

$$\alpha_k := \inf\{\mu_A(V), V \in E_k\} \leq \mu_A(V_k) = \lambda_k.$$

b) Comme $\dim(V) = k$ et $\dim(V_{k-1}^\perp) = n - (k-1) = n - k + 1$, on a $\dim(V) + \dim(V_{k-1}^\perp) = n + 1 > n$ donc V et $V_{k-1}^\perp$ ne sont pas en somme directe :

$$V \cap V_{k-1}^\perp \neq \{0\}.$$

c) Soit $y \in V \cap V_{k-1}^\perp \setminus \{0\}$:

— comme $y \in V_{k-1}^\perp$, on a $\inf\{ R_A(x), x \in V_{k-1}^\perp \setminus \{0\}\} \leq R_A(y)$, c'est-à-dire, par la Q11 :

$$\lambda_k \leq R_A(y)$$

— comme $y \in V$, on a $R_A(y) \leq \sup\{R_A(x), x \in V \setminus \{0\}\}$ donc

$$R_A(y) \leq \mu_A(V)$$

d) Avec le c), on a donc montré que pour tout $V \in E_k$:

$$\lambda_k \leq \mu_A(V).$$

Ainsi λ_k est un minorant des $\mu_A(V)$, indépendant de V, on conclut que;

$$\lambda_k \leq \inf\{\mu_A(V),\ V \in E_k\} = \alpha_k$$

Avec l'inégalité du a), on a l'égalité :

$$\boxed{\alpha_k = \lambda_k}$$

Q13) a) Par le théorème de Courant-Fischer, $\lambda_k(t) = \inf\{\mu_{A(t)}(V),\ V \in E_k\}$.
Comme $V_k(t_0) \in E_k$, on a immédiatement l'inégalité :

$$\lambda_k(t) \leq \mu_{A(t)}\left(V_k\left(t_0\right)\right).$$

b) Soit $x \in V_k(t_0) \setminus \{0\}$. Par définition et linéarité du produit scalaire :

$$R_{A(t)-A(t_0)}(x) = \frac{(A(t)x|x)}{\|x\|^2} - \frac{(A(t_0)x|x)}{\|x\|^2} = R_{A(t)}(x) - R_{A(t_0)}(x).$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} R_{A(t)}(x) &= R_{A(t)-A(t_0)}(x) + R_{A(t_0)}(x), \\ &\leq \sup\{R_{A(t)-A(t_0)}(y), y \in V_k(t_0) \setminus \{0\}\ \} + \sup\{R_{A(t_0)}(y),\ y \in V_k(t_0) \setminus \{0\}\ \} \\ &\leq \delta_k(t_0) + \lambda_k(t_0) \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant donnée d'une part par la définition de $\delta_k(t_0)$ et par la Q11).
L'inégalité obtenue étant vraie pour tous les $x \in V_k(t_0) \setminus \{0\}$, on obtient la même majoration du sup. :

$$\sup\{R_{A(t)}(x), x \in V_k(t_0) \setminus \{0\}\} \leq \delta_k(t_0) + \lambda_k(t_0)$$

autrement dit :

$$\mu_{A(t)}(V_k(t_0)) \leq \delta_k(t_0) + \lambda_k(t_0)$$

ce qui, encore par Courant-Fischer donne l'inégalité demandée :

$$\lambda_k(t) \leq \delta_k(t_0) + \lambda_k(t_0)$$

c) Comme à la Q11) on sait que si S est une matrice symétrique réelle de spectre ordonné $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ avec une b.o.n. de vecteurs propres associés $(e_1, \ldots, e_n)$, si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors

$$\lambda_1 \leq R_S(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \lambda_n$$

En particulier $R_S(x) \leq \lambda_n \leq \rho(S) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_n|) = \|S\|_2$ par la Q 5).
Donc ici pour $S = A(t) - A(t_0)$, on a :

$$R_{A(t)-A(t_0)}(x) \leq \|A(t) - A(t_0)\|_2$$

et en passant au sup. dans cette inégalité où le majorant est indépendant de x, on a bien :

$$\delta_k(t_0) \leq \|A(t) - A(t_0)\|_2.$$

Remarque : méthode plus simple, majorer $R_{A(t)-A(t_0)}(x)$ par $\dfrac{\|(A(t) - A(t_0))x\|.\|x\|}{\|x\|^2}$ par l'I.C.S.

d) On a donc montré que pour tout t, t_0 dans $[a, b]$

$$\lambda_k(t) \leq \lambda_k(t_0) + \|A(t) - A(t_0)\|_2$$

En permutant les rôles de t et t_0, on en déduit que :

$$|\lambda_k(t) - \lambda_k(t_0)| \leq \|A(t) - A(t_0)\|_2$$

ce qui suffit à prouver la continuité de $t \mapsto \lambda_k(t)$. □