# TD chap. T4 : les suites de Dirac et le théorème de Weierstrass

**I Suites approximantes d'un Delta de Dirac**

Vers 1926-1927, le physicien Paul-Adrien-Marie Dirac eut l'idée d'introduire une « fonction » $\delta$ possédant deux propriétés surnaturelles : d'une part,

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \quad \delta(0) = +\infty \quad (1)$$

d'autre part, pour toute fonction $f$ « raisonnable »

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (2).$$

Cette « intégrale » n'a pas de sens pour nous, en ce sens qu'il faudrait définir une intégrale pour ce genre d'objet. Cette « fonction » $\delta$ échappe un peu aux mathématiques qu'on enseigne en prépa, comme elle a échappé d'ailleurs aux mathématiciens jusqu'à l'invention de la théorie des distribution par Laurent Schwartz vingt ans plus tard (ce qui compte vraiment pour définir $\delta$ est beaucoup plus (2) que (1)).

Ce qu'on peut comprendre ici par contre, c'est que l'idée de Dirac pose la question de savoir si on peut approcher la valeur $f(0)$ d'une fonction $f$ à l'aide d'intégrales portant sur $f$, par exemple en utilisant des fonctions $x \mapsto u_n(x)$ telles que :

$$\text{Pour toute fonction } f \text{ « raisonnable »} \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)u_n(x)dx = f(0) \qquad (\dagger)$$

Dirac lui-même propose deux exemples de telles fonctions $u_n$ :

- gratte-ciel : $u_n \ : \ x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } |x| > 1/n, \\ n/2 \text{ si } |x| \leq 1/n \end{cases}$
- cloches : $u_n \ : x \mapsto \sqrt{n}\exp(-n\pi x^2)$

**Q0)** Combien valent les $\int_{\mathbb{R}} u_n$ dans ces deux cas ?

Pour simplifier, on se restreint dans ce qui suit à des fonctions $u_n$ *positives.*

**Q1)** Justifier que ($\dagger$) appliquée à une fonction « raisonnable » donne $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx = 1$.

> **Déf.** une suite de fonctions c.p.m. *positives* $(u_n)$ est dite une *suite de Dirac* ssi elle vérifie les deux conditions suivantes :
> (D1) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} u_n = 1$
> (D2) $\forall\, \alpha > 0, \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

**Q2)** Vérifier que les $u_n \ : x \mapsto \sqrt{n}\exp(-n\pi x^2)$ vérifient la déf. précédente.

**Q3)** On suppose que $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est *continue en* 0 *et bornée sur* $\mathbb{R}$ et que $(u_n)$ est une suite de Dirac quelconque. On considère :

$$|\int_{\mathbb{R}} f(x)u_n(x)dx - f(0)| = |\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(0))u_n(x)dx| \qquad (\ddagger)$$

On fixe un $\varepsilon > 0$.

3.1.) Justifier qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \int_{[-\alpha,+\alpha]} |f(x) - f(0)|u_n(x)dx \leq \varepsilon/2$

3.2) En déduire qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0, |\int_{\mathbb{R}} f(x)u_n(x)dx - f(0)| < \varepsilon$.

On a donc montré le

**Lemme de Dirac** Si $(u_n)$ est une suite de Dirac, alors pour toute fonction $f$ c.p.m. bornée sur $\mathbb{R}$ et continue en 0, on a :

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u_n(t)dt.$$

**Q4)** Justifier que pour toute fonction $u$ c.p.m. positive d'intégrale 1, la suite $(u_n)$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = nu(nx)$ est une suite de Dirac.

**Q5)** (i) Si $u$ est comme à la Q4 et est une fonction nulle en dehors d'un segment, toutes les $(u_n)$ définies à la Q4) le sont aussi.

(ii) Justifier que si $(u_n)$ est une suite de Dirac quelconque mais vérifiant qu'il existe un $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est nulle en dehors de $[-A, A]$ alors on peut enlever l'hyp. « $f$ bornée » dans le lemme de Dirac.

## II Un résultat de convergence uniforme pour la convolution par les suites de Dirac

Au §I, on a montré le « lemme de Dirac » (qui n'est bien sûr pas dû à Dirac) on a va ici montrer le :

**Théorème :** Soit $(u_n)$ une suite de Dirac. Alors pour toute fonction $f$ continue sur $\mathbb{R}$, *bornée* sur $\mathbb{R}$ : **(C1)** $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)u_n(t)dt$
**(C2)** Mieux la convergence donnée au (C1) est uniforme sur tout segment.
**(C3)** La (C1) et la (C2) se généralisent au cas où on ne suppose plus $f$ *bornée*, mais qu'on suppose que les fonctions $u_n$ sont *nulles en dehors d'un même segment* $[-A, A]$.

**Q6)** Démontrer la (C1) avec le lemme de Dirac appliqué à une fonction bien choisie.

**Q7)** Justifier que pour montrer la (C2), il suffit de montrer que la suite des fonctions $d_n : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x-t)|u_n(t)dt$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

**Q8)** On fixe un segment $K = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ et un $\varepsilon > 0$.
Justifier, à l'aide de la continuité de $f$, qu'il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in K,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_{[-r,r]} |f(x) - f(x-t)|u_n(t)dt \le \varepsilon/2.$$

**Q9)** Justifier à l'aide du caractère borné de $f$, qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ indépendant de $x$ tel que :

$$\forall\, n \ge n_0,\ \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} |f(x) - f(x-t)|u_n(t)dt < \varepsilon/2.$$

**Q10)** En déduire (C2).

**Q11)** Montrer ensuite comment le raisonnement précédent doit être modifié pour montrer (C3).

## III Introduction au produit de convolution :

**Déf.** Pour deux fonctions $f$ et $g$, l'intégrale (si elle est définie) $f*g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ s'appelle *produit de convolution de $f$ par $g$.*

Le résultat de la (C2) du théorème du § II se reformule alors :

**Théorème reformulé :** Si $f$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et si $(u_n)$ est une suite de Dirac, alors $(f * u_n)$ CVU vers $f$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

**Q12)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions c.p.m. avec $f$ bornée et $g$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'alors les deux produits de convolutions $(f * g)(x)$ et $(g * f)(x)$ sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ et sont égaux.

**Q13) Convolution d'une fonction continue à support compact avec $u_n$**

Montrer que si $f$ est nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ et $g$ est nulle en dehors d'un segment $[-B, B]$ alors $f * g$ est nulle en dehors d'un segment que l'on précisera.

**Terminologie :** Le support d'une fonction $f$ est l'adhérence de l'ensemble des $x$ tels que $f(x) \neq 0$. Ainsi si $f$ est nulle en dehors de $[-A, A]$, le support de $f$ est inclus dans $[-A, A]$. On dit que $f$ est *à support compact*.

## IV Application au théorème de Weierstrass (1885)

*La démonstration suit l'idée originale de Weierstrass.. qui connaissait donc les « suites de Dirac » bien avant Dirac.*

**Q14) Une suite de Dirac polynomiale sur son support :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt$, et on note ;

$$u_n \;:\; t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}, & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [-1,1] \end{cases}$$

On va montrer que $(u_n)$ est une suite de Dirac.

i) On rappelle l'équivalent des intégrales de Wallis : $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
En déduire un équivalent de $\lambda_n$

ii) Soit $\alpha < 1$.
En majorant $\displaystyle\int_{|t|\geq\alpha} (1-t^2)^n dt = 2\int_{\alpha}^{1} (1-t^2)^n dt$, montrer que :

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_{|t|\geq\alpha} (1-t^2)^n dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

iii) Conclure que $(u_n)$ est une suite de Dirac.

**Q15) Application à l'approximation des fonctions continues à support dans** $[-1/2, 1/2]$
Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support dans $[-1/2, 1/2]$. (En particulier $f(1/2) = f(-1/2) = 0$).
(i) Montrer que $(f * u_n)$ est une fonction polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$, nulle en dehors de $[-3/2, 3/2]$.
(ii) Montrer que la suite de fonctions $(f * u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-1/2, 1/2]$.

**Q16)** Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On fixe un segment $[c,d]$ avec $c < a < b < d$. On prolonge $f$ par une fonction affine sur $[c,a]$ et $[b,d]$ de sorte que $f(c) = f(d) = 0$ et on prolonge encore $f$ par zéro à l'extérieur de $[c,d]$.
En déduire le :

> **Théorème de Weierstrass polynomial :** pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ il existe une suite de fonctions polynomiales qui CVU vers $f$ sur $[a,b]$.

**Q17)** Bonus : à l'aide de la suite $(u_n)$ montrer qu'il n'existe pas de fonction $g$ continue bornée telle que pour tout fonction $f$ intégrable on ait $f * g = f$ (un élément neutre pour la convolution).
*Indication* – On pourra considérer la limite des $u_n(0)$.

# Solution du TD Chap. T4 : Approximation de Weierstrass

**Q0)** • Pour le gratte-ciel, $u_n\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } |x| > 1/n, \\ n/2 \text{ si } |x| \le 1/n \end{cases}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n = n/2.(1/n + 1/n) = 1$.

• Pour la cloche $I_n := \int_{-\infty}^{+\infty} u_n = \sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-n\pi x^2)dx$. On pose $t = \sqrt{n\pi}x$ dans cet intégrale convergente, on obtient $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1$ par la valeur connue de l'intégrale de la gaussienne.

**Q1)** On ne sait pas si (†) est supposée s'appliquer à toutes les $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, mais en tous cas, si on prend comme fonction raisonnable pour $f$ la fonction qui est constante égale à 1, la formule (†) donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} u_n = f(0) = 1$$

**Q2)** On a déjà vu à la question Q0) que les $u_n$ vérifient la condition (D1).
Pour montrer qu'elles vérifient la condition (D2) un changement de variable suffit : dans $\int_{\alpha}^{+\infty} u_n(x)dx = \sqrt{n}\int_{\alpha}^{+\infty}\exp(-n\pi x^2)dx$ on pose $t = \sqrt{n}x$ ce qui donne :

$$\int_{\alpha}^{+\infty} u_n(x)dx = \int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty}\exp(-\pi t^2)dt$$

et

$$\int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty}\exp(-\pi t^2)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

comme reste d'intégrale convergente. De même pour $\int_{-\infty}^{-\alpha} u_n = \int_{\alpha}^{+\infty} u_n$ par parité.
Pour mieux comprendre comment on construit de telles suites voir Q4).

**Q3)** 3.1) Comme $f$ est continue en 0, on a un $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [-\alpha,+\alpha]$, $|f(t)-f(0)| \le \varepsilon/2$.
En multipliant par $u_n(t) \ge 0$ et en intégrant sur $[-\alpha,+\alpha]$, on obtient :

$$\int_{[-\alpha,+\alpha]}|f(x)-f(0)|u_n(x)dx \le \varepsilon/2\int_{[-\alpha,+\alpha]}u_n \quad (1)$$

Comme $u_n \ge 0$ sur $\mathbb{R}$, on sait que $\int_{[-\alpha,+\alpha]}u_n \le \int_{\mathbb{R}}u_n = 1 \quad (2)$

On déduit de (1) et (2) que :

$$\int_{[-\alpha,+\alpha]}|f(x)-f(0)|u_n(x)dx \le \varepsilon/2$$

**Remarque :** certains ont été essayé de traiter cette condition sans utiliser la continuité de $f$ en 0, ni aucune propriété spécifique de la valeur $f(0)$, ce qui n'est pas raisonnable puisque c'est la limite qu'on doit trouver à la fin !

3.2) Suivant le 3.1) on découpe l'intégrale en deux parties :
Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]$, comme $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$, en majorant :

$$|f(x)-f(0)| \le |f(x)| + |f(0)| \le 2\|f\|_\infty,$$

on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,+\alpha]}|f(x)-f(0)|u_n(x)dx \le 2\|f\|_\infty\int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,+\alpha]}u_n(x)dx \quad (3)$$

Par la propriété (D2) des suites de Dirac, on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \ge n_0,\ \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,+\alpha]}u_n(x)dx \le \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty},$$

ce qui, dans (3) donne :

$$\forall\, n \geq n_0,\ \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,+\alpha]} |f(x)-f(0)|u_n(x)dx < \varepsilon/2 \quad (4)$$

En ajoutant l'inégalité (4) et l'inégalité de la question 3.1), on obtient :

$$\forall\, n \geq n_0,\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)-f(0)|u_n(x)dx < \varepsilon$$

ce qui donne avec l'égalité (‡) :

$$\forall\, n \geq n_0,\ |\int_{\mathbb{R}} f(x)u_n(x)dx - f(0)|dx < \varepsilon$$

On a bien vérifié la définition de la limite : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u_n(t)dt = f(0)}$.

**Q4) Une construction plus générale de suites de Dirac**
Cette question est très proche de la Q2, simple changement de variable dans l'intégrale.
• Pour (D1), le changement de variable $t = nx$ donne, avec $ndx = dt$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)dx \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} nu(nx)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt = 1.$$

• Soit $\alpha > 0$. comme $\int_{\mathbb{R}} u_n = 1$ et que $\int_{\mathbb{R}} u_n = \int_{[-\alpha,\alpha]} u_n + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} u_n$, pour montrer (D2) il est équivalent de montrer que :

$$\int_{[-\alpha,+\alpha]} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (\mathrm{D2}')$$

Or avec le même changement de variable $t = nx$ :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} u_n(x)dx = \int_{-n\alpha}^{n\alpha} u(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt = 1$$

ce qui démontre bien que (D2') (et donc (D2)) est vérifiée.

**Q5)** On suppose $u$ nulle en dehors de $[-A, A]$. Si $|x| > A$, alors pour tout $n \geq 1$, $|nx| > A$ donc $u_n(x) = 0$, donc toutes les $u_n$ pour $n \geq 1$ sont nulles en dehors de $[-A, A]$.
On ne change donc pas la valeur de $\int_{\mathbb{R}} fu_n$ en remplaçant $f_{|\mathbb{R}\setminus[-A,A]}$ par la fonction nulle.
La fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est alors c.p.m. sur $\mathbb{R}$ et bornée, on peut lui appliquer le lemme de Dirac.

**Q6)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $g\ :\ t \mapsto f(x-t)$. Alors $g$ est continue bornée sur $\mathbb{R}$. Le lemme de Dirac dit que :

$$g(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)u_n(t)dt$$

Or $g(0) = f(x)$ donc la formule précédente s'écrit :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)u_n(t)dt.$$

**Q7)** Notons $I_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)u_n(t)dt$. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
On veut montrer que $\sup_{x\in[a,b]} |I_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or comme $\int_{\mathbb{R}} u_n = 1$, on peut écrire

$$|I_n(x) - f(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)u_n(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)u_n(t)dt| = |\int_{\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))u_n(t)dt|$$

et par inégalité triangulaire pour les intégrales on en déduit que :

$$|I_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)| u_n(t) dt = d_n(x)$$

Ainsi par majoration :

$$||I_n - f||_{\infty,[a,b]} \leq ||d_n||_{\infty,[a,b]},$$

pour montrer (D2) il suffit donc de montrer que $(d_n)$ CVU vers zéro sur chaque segment $[a,b]$.

**Q8)** On reprend l'idée de la Q3.1) mais attention cette fois,

• On veut un $r > 0$ qui « marche » pour tous les $x \in K$, on va avoir besoin de *l'uniforme continuité* de $f$ sur les segments. Celle-ci est acquise par théorème de Heine : une fonction continue sur un segment est uniformément continue.
• En outre il faut faire attention que si $x$ varie dans $K$ et $|t| < r$ alors $x - t$ peut sortir de $K$ on a donc besoin de prendre un segment « de sécurité » un peu plus gros que $K$.

Précisément : soit $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé. Soit $K' = [a-1, b+1] \supset K$. Comme $f$ est continue sur le segment $K'$, il existe un $r > 0$ tel que :

$$\forall\, (x,y) \in (K')^2,\ |x-y| < r \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \quad (1)$$

Quitte à remplacer $r$ par $\min(r,1)$, on suppose que $r \leq 1$. Alors pour tout $x \in K$, et tout $t \in [-r,r]$, on a $x - t \in K'$ et en appliquant (1) à $x \in K \subset K'$ et $y = x - t \in K'$, on a $|x-y| < r$ donc

$$\forall\, x \in K,\ \forall\ t \in [-r,r],\ |f(x) - f(x-t)| < \varepsilon/2 \quad (2)$$

En multipliant par $u_n(t) > 0$ et en intégrant l'inégalité (2) pour $t \in [-r,r]$, on a :

$$\forall\, x \in K,\quad \int_{-r}^{r} |f(t) - f(x-t)| u_n(t) dt \leq \int_{-r}^{r} \varepsilon/2 u_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

**Q9)** Cette partie de la dém. est identique à celle de la Q3.2). L'essentiel (pour la dém. de la CVU à la question suivante) est bien que le $n_0$ soit le même pour tout les $x \in K$ (en fait c'est le même pour tous les $x \in \mathbb{R}$).
En effet, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, comme $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$,

$$|f(t) - f(x-t)| \leq |f(t)| + |f(x-t)| \leq 2||f||_\infty,$$

on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,+r]} |f(t) - f(x-t)| u_n(t) dt \leq 2||f||_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,+r]} u_n(t) dt \quad (1)$$

On applique alors la propriété (D2) des suites de Dirac pour obtenir la conclusion comme au Q3.2).

**Q10)** D'après les deux questions précédentes, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geq n_0,\ \forall\ x \in [a,b],\qquad \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(x-t)| u_n(t) dt < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Ceci signifie bien, avec les notations de la Q7, que la suite de fonctions $(d_n)$ CVU sur $[a,b]$ vers la fonction nulle, et d'après la même Q7, cela montre la (C2) du Théorème.

**Q11)** On suppose maintenant que toutes les fonctions $u_n$ sont nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$. Le raisonnement de la Q8 s'applique encore puisqu'on n'y a pas utilisé le fait que $f$ était bornée sur $\mathbb{R}$. Reste à modifier celui de la Q9. Or en prenant SRdG $r < A$, on a ici :

$$\int_{\mathbb{R}\smallsetminus[-r,+r]} |f(t)-f(x-t)|u_n(t)dt = \int_r^A |f(t)-f(x-t)|u_n(t)dt + \int_{-A}^{-r} |f(t)-f(x-t)|u_n(t)dt \quad (1)$$

Or si $x \in [a, b]$ et $t \in [r, A]$ alors $-t \in [-A, -r]$ et $x - t \in [a - A, b - r]$.
Ainsi comme $f$ est continue sur les segments $[r, A]$ et $[a - A, b - r]$, il existe un $M$ tel que pour tout $t \in [r, A]$ et tout $x \in [a, b]$, $|f(t) - f(x - t)| \leq M$.
Ainsi la première intégrale à droite dans (1) peut se majorer comme suit :

$$\exists\ M_1 > 0,\ \forall\, x \in [a, b],\ \int_r^A |f(t) - f(x - t)|u_n(t)dt \leq M \int_r^A u_n(t)dt$$

On majore de même la seconde intégrale à droite de (1) et on conclut avec la propriété (D2) des suites de Dirac.

**Q12)** Si $f$ est bornée, et $g$ est intégrable alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x\ :\ t \mapsto |f(x - t)g(t)|$ vérifie $0 \leq \varphi_x(t) \leq M|g(t)|$ donc $\varphi_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par majoration. Ainsi $(f * g)(x)$ est bien définie.
Dans l'intégrale $f * g(x)$, on fait le changement de variable $u = x - t$ et on obtient $(g * f)(x)$.

**Q13)** Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.
Si $t \in [-A, A]$ et $x - t \in [-B, B]$ alors par inégalité triangulaire $|x| = |x-t+t| \leq |x-t|+|t| \leq A+B$.
Donc si $|x| > A + B$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a ou bien $t \notin [-A, A]$ ou bien $x - t \notin [-B, B]$ et dans les deux cas $f(t)g(x - t) = 0$.
Ainsi si $|x| > A + B$, $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)dt = 0$.
Ainsi $\boxed{f * g \text{ est nulle en dehors du segment } [-(A + B), A + B]}$.

**Q14)** (i) Dans $\lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n dt$ on pose $u = \arcsin(t)$ donc $t = \sin(u)$ et $dt = \cos(u)du$.
Alors $\lambda_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2(u))^n \cos(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u)du = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u)du$ (par parité).
Ainsi, avec l'équivalent donné pour $W_n$, on a :

$$\lambda_n = 2W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

(ii) Soit $\alpha < 1$, par décroissance de $t \mapsto (1-t^2)^n$ sur $[\alpha, 1]$, on a $\forall\, t \in [\alpha, 1]$, $(1-t^2)^n \leq (1-\alpha^2)^n$ et donc en intégrant cette inégalité :

$$\int_\alpha^1 (1 - t^2)^n dt \leq (1 - \alpha).(1 - \alpha^2)^n$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_{|t|\geq\alpha} (1 - t^2)^n dt \leq \frac{1}{\lambda_n}(1 - \alpha).(1 - \alpha^2)^n =: M_n \quad (1)$$

Or avec l'équivalent trouvé au (i), $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{\pi}}(1 - \alpha).(1 - \alpha^2)^n$ et comme $(1 - \alpha)^2 \in ]0, 1[$, par croissance comparée, $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui avec (1) donne bien la conclusion souhaitée :

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_{|t|\geq\alpha} (1 - t^2)^n dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iii) On vérifie les propriétés (D1) et (D2) des suites de Dirac.

• Pour (D1) : on a $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t)dt = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-t^2)^n dt = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1.$

• Pour (D2) : soit $\alpha > 0$.

Si $\alpha \geq 1$ alors $\int_{|t|\geq\alpha} u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\alpha < 1$, alors $\int_{|t|\geq\alpha} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par (ii).

Ainsi $(u_n)$ est bien une suite de Dirac.

**Q15)** (i) Comme $u_n$ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et $f$ est nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$, on sait par Q13 que $f * u_n$ est nulle en dehors de $[-3/2,3/2]$.

Comme $f$ est à support dans $[-1/2,1/2]$, $f * u_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)u_n(x-t)dt$.

Soit $x \in [-1/2,1/2]$. Alors pour chaque $t \in [-1/2,1/2]$, $x - t \in [-1,1]$, on sait donc que

$$u_n(x-t) = \frac{1}{\lambda_n}(1-(x-t)^2)^n$$

et :

$$f * u_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(1-(x-t)^2)^n dt \qquad (1)$$

En écrivant la fonction polynomiale $x \mapsto (1-(x-t)^2)^n$ sous la forme :

$$(1-(x-t)^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k,$$

où les $t \mapsto a_k(t)$ sont aussi des fonctions polynomiales, on déduit de (1) que :

$$\forall\, x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\ f * u_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)a_k(t)dt\right)x^k$$

ce qui est bien l'écriture d'une fonction *polynomiale* en $x$, de degré au plus $2n$.

(ii) Comme $(u_n)$ est une suite de Dirac et que $f$ est continue à support compact donc bornée sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirac du § II (C2) s'applique directement (on peut aussi utiliser la (C3) si on préfère puisque les $(u_n)$ sont aussi nulles en dehors de $[-1,1]$) : $f * u_n$ CVU vers $f$ sur tout segment, en particulier sur $[-1/2,1/2]$.

**Q16)** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction affine telle que $\varphi(-1/2) = c$ et $\varphi(1/2) = d$.

Soit $\tilde{f} := f \circ \varphi$. Alors $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\tilde{f}$ est à support inclus dans $[-1/2,1/2]$.

D'après la question précédente, on sait alors que la suite $(\tilde{f} * u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales sur $[-1/2,1/2]$, nulles en dehors de $[-3/2,3/2]$, qui converge uniformément vers $\tilde{f}$ sur $[-1/2,1/2]$.

Or comme $\varphi$ est une fonction affine non constante, donc bijective, en notant $p_n := \tilde{f} * u_n$, on peut considérer les fonctions $q_n = p_n \circ \varphi^{-1}$, qui, par composition de fonctions polynomiales, sont polynomiales sur le segment $[c,d]$ et la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge uniformément vers $f$ sur $[c,d]$ et donc en particulier sur $[a,b]$.

On vient de démontrer le :

| **Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass** |
|---|
| Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est la limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales. |

**Q17)** *Par l'absurde* si une telle fonction $g$ existait. Alors en particulier, avec la suite $(u_n)$ définie ci-dessus, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n * g = u_n$$

Comme $(u_n)$ est une suite de Dirac, par le lemme de Dirac, qui s'applique puisque $g$ est bornée, ou parce que $u_n$ est à support compact, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $u_n * g(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(x)$ donc en particulier pour $x = 0$, on aurait :

$$u_n(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(0)$$

Or $u_n(0) = \dfrac{1}{\lambda_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$ donc $u_n(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *contradiction.*