CVU et Approximation dans les espaces de fonctions (niveau Centrale-Mines)

Exercice 1 (Théorème de Dini)**.** Soit K un compact d'un e.v.n. $(f_n) \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur K.

On suppose que *la suite* (f_n) est décroissante, i.e. que pour chaque $x \in K$ fixé, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

a) On suppose que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. On va montrer que la convergence est uniforme.
On fixe un $\varepsilon > 0$. Pour chaque n, on pose : $K_n = \{x \in K,\ f_n(x) \geq \varepsilon\}$
Montrer que K_n est un compact. Conclure en considérant $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

b) On suppose maintenant que (f_n) CVS vers une fonction *continue* f quelconque. Montrer encore que la convergence est uniforme grâce au a).

c) En considérant la suite des fonctions $f_n\ :\ ]0,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1+nx}$ montrer l'importance du fait que l'ensemble de départ des f_n soit compact.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$.

Pour toute fonction $f \in E$, on note $\mathbb{R}[f] = \{P(f),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par f.

Montrer que $\mathbb{R}[f]$ est dense dans E si, et seulement si, f est injective.

Exercice 3 (Généralisation de Riemann-Lebesgue)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque.

On se propose de montrer que, si $f \in \mathscr{L}^1(I,\mathbb{C})$ et si g est continue par morceaux T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors $\int_I f(t)g(\lambda t)dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{T}\left(\int_I f\right)\left(\int_0^T g\right)$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe φ en escalier sur I telle que $\|f-\varphi\|_1 \leqslant \varepsilon$.

b) On suppose $\int_0^T g = 0$, prouver le résultat si f est en escalier puis si $f \in \mathscr{L}^1(I,\mathbb{C})$ qcq en utilisant a)

c) En déduire en particulier la forme usuelle du lemme de Riemann-Lebesgue :
si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors $\widehat{f}(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ vérifie $\widehat{f}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. d) Traiter le cas $\int_0^T g \neq 0$.

Révisions et compléments sur les espaces préhilbertiens : pour tout le monde

Banque CCINP : 76, 77, 79, 80, 81, 82.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$. Soit E_n l'ensemble des applications polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Soit f et g appartenant à E. On définit $\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

a) Montrer que φ est bien définie et est un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

b) On définit T_n comme l'unique polynôme de degré n tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ. Calculer $\|T_n\|_2$.

c) Montrer que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de E_n.

d) Soit $d_2(f) = \inf\{\|f-Q\|_2,\ Q \in E_n\}$ pour $f \in E$. Justifier qu'il existe un unique vecteur $t_n(f) \in E_n$ tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f)$.

e) Exprimer $t_n(f)$ dans la base (T_k).

Exercice 5 (Exemple de p.s)**.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$.

a) Justifier que l'application $\varphi\ :\ E^2 \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} f(u_n)g(u_n)$ est bien définie.

b) Déterminer la C.N.S sur u pour que φ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 6. a) Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Donner la valeur minimum possible pour $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

b) Soit $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(t) = 1\}$. Déterminer le $\displaystyle\min_{f\in\mathcal{A}} \int_0^1 f(t)^2 dt$.

Exercice 7.

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_1,f_2) \in E^2$ une famille libre.

a) Montrer que $\forall\,(w_1,w_2) \in \mathbb{R}^2,\ \exists\,!\,h \in \mathrm{Vect}(f_1,f_2),\ \displaystyle\int_a^b h(t)f_1(t)dt = w_1, \quad \text{et} \quad \int_a^b h(t)f_2(t)dt = w_2.$

b) Pour $(w_1,w_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés, quelle est la structure de l'ensemble des $h \in E$ solutions du a) ?

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $e_n(x) = x^n$. On munit E de son produit scalaire canonique : celui pour lequel la base canonique est orthonormée.

a) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[x],\ P(1) = 0\}$ Déterminer $F^\perp$.

b) Existe-t-il $P \in F$ tel que $d(1,F) = \|1-P\|$?