Banque CCINP : Ex. 13.

Exemples de compacts.. ou pas

Exercice 1. Soit $(E, \|\ \|)$ un e.v.n. Déterminer les s.e.v. F de E qui sont *compacts*.

Exercice 2. Justifier que si A et B sont deux sous-ensembles compacts dans E et F respectivement alors $A \times B$ est un compact de l'e.v.n. produit $E \times F$.

Exercice 3. a) Donner un exemple d'une suite bornée d'un e.v.n. de votre choix, qui n'admet pas de valeurs d'adhérences

b) En déduire que dans cet e.v.n. les boules fermées sont toutes non compactes.

Exercice 4 (Un ensemble toujours compact, même en dim. infinie)**.** Soit $(E, \|\ \|)$ un e.v.n. et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un $\ell \in E$. Montrer que $X = \{x_n,\ \ n \in \mathbb{N}\}\ \cup \{\ell\}$ est compact.

Propriétés des compacts, fonctions continues sur un compact

Exercice 5 (Compact entraîne précompact (Mines-Ponts))**.** a) Montrer que si A est un compact non vide d'un e.v.n. (i.e. A vérifie la prop. de B.W.) alors A est *précompact* ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille *finie* $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de A (le nombre n dépendant de ε) tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

b) Montrer qu'un sous-ensemble compact K dans un e.v.n. E est *séparable* i.e. qu'il existe un sous-ensemble $D \subset K$ dénombrable et dense dans K.

Exercice 6 (Théorème des compacts emboités)**.** a) Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille *décroissante* de compacts non vides d'un e.v.n. $(E, \|\ \|)$ i.e. telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ K_{n+1}\ \subset K_n$.

Montrer que $K \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est encore *non vide*.

On pourra considérer une suite (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K_n$.

b) Si A est une partie non vide bornée de E, justifier que son *diamètre* $\delta(A)$ est bien défini où :

$$\delta(A) = \sup\{\ \|a - b\|,\ (a, b) \in A^2\}$$

c) On reprend les hypothèses du a) et on suppose en outre que $\delta(K_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que dire alors de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$?

Exercice 7 (Fonctions coercives)**.** Soient E un e.v.n. de dim. finie et $f\ :\ E\ \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (on dit que f est coercive). Montrer que f admet un minimum global sur E.

Exercice 8. a) Si K est un compact et $f\ \ :\ K \to K$ est une fonction *strictement* 1-*lipschitzienne* en ce sens que pour tout $(x, y) \in K$:

$$x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|,$$

alors f admet un point fixe dans K.

Indication – on pourra considérer la fonction $x \mapsto \|f(x) - x\|$.

b) On note $\ell\ \in K$ le point fixe trouvé au a). Soit $u_0 \in K$ et (u_n) définie par ce u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Connexité par arc

Exercice 9 (Cas des sphères)**.** Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dim. au moins 2. On note S la sphère unité de E. Montrer que S est connexe par arcs.

Exercice 10. Montrer un produit de deux parties connexes par arc est connexe par arc.

Exercice 11. Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme envoyant la lettre I sur la lettre O, ni d'homéo entre O et B.

Exercice 12 (Centrale 1 MP 2021)**.**

a) Soit I un intervalle réel et f de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que f′(I) est un intervalle.
b) Donner un exemple de fonction dérivable qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Soit I un intervalle réel. Montrer que l'ensemble $C = \left\{(x, y) \in I^2, x < y\right\}$ est connexe par arcs.
d) **Théorème de Darboux :** Soit I un intervalle réel.et f une fonction dérivable sur I.Montrer que f' (I) est un intervalle.

Indication fournie par l'examinateur pendant l'épreuve pour le d) :

Soit $\tau : (x, y) \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, montrer que $\tau(C) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(C)}$