Sur l'adjoint d'un endomorphisme

Exercice 1. Si E est un espace euclidien et si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur quelconque, que dire de p^* ? Que dire d'un projecteur p si $p = p^*$?

Exercice 2. Soit E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E, (u(x)|x) = 0$. Montrer que $u^* = -u$.d

Exercice 3 (Calcul d'adjoint d'un endomorphisme de rang 1)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien et $(a, b) \in E^2$ deux vecteurs linéairement indépendants. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\forall\, x \in E,\ u(x) = (a|x)b$.
Déterminer explicitement u^*.

Exercice 4 (Norme d'opérateur des F.L.)**.** Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. Pour toute forme linéaire $\varphi \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, on note : $||\varphi||_{op}$ la norme subordonnée à la norme euclidienne sur E.
a) Définir cette norme $||\varphi||_{op}$
b) On sait que pour tout $\varphi \in E^*$, il existe un unique vecteur $x_\varphi \in E$ tel que $\varphi :\ \ y \in E \mapsto (x_\varphi|y)$.
Montrer que $||\varphi||_{op} = ||x_\varphi||$.
Autrement dit, l'isomorphisme de Riesz : $(E, ||\ ||) \to (E^*, ||\ ||_{op}),\ x \mapsto (x|\cdot)$ est une isométrie.

Exercice 5 (Déf. "polarisée" de la norme d'opérateur, et norme de l'adjoint)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace euclidien. On note $||u||$ la norme subordonnée à la norme euclidienne et B la boule unité fermée.
a) Soit $x \in E$, montrer que $||x|| = \sup\{(x|y),\ y \in B\}$.
b) En déduire que :

$$||u|| \overset{def}{=} \sup\{||u(x)||,\ x\ \in B\} \overset{prop}{=} \sup\{(u(x)|y), x \in B,\ y \in B\}.$$

b) En déduire que : $||u|| = ||u^*||$

Exercice 6. Soit E un espace euclidien. Un élément $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si, et seulement si, il commute avec son adjoint.

a) Donner des exemples d'endomorphismes normaux.
b) Déterminer matriciellement tous les endomorphismes normaux d'un e.v. de dim. 2.
c) Montrer que si E est euclidien de dim. quelconque et $f \in \mathscr{L}(E)$ est normal et si F est un s.e.v. de E stable par f alors F est aussi stable par f^*, autrement dit que $F^\perp$ est stable par f.
Indication : on pourra raisonner matriciellement.

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 7. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$ et $S = a + b + c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
a) Montrer que $M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S \in \{-1, 1\}$.
b) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$, et $S = 1$.
c) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, \dfrac{4}{27}]$ tel que a, b, c soient les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.
d) Justifier que si $M \in SO_3(\mathbb{R})$ alors $a^3 + b^3 + c^3 \in [5/9, 1]$.

Exercice 8 (Grand classique, incontournable des concours divers)**.** Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

a) $n \overset{(1)}{\leq} \sum\limits_{i,j} |a_{i,j}| \overset{(2)}{\leq} n\sqrt{n}$,
b) $|\sum\limits_{i,j} a_{i,j}| \leq n$.
c) Trouver une matrice dans $O_2(\mathbb{R})$ puis une matrice dans $O_4(\mathbb{R})$ pour lesquelles il y a égalité dans (2).
d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$, l'inégalité (2) est toujours stricte.

Exercice 9 (Endomorphisme de multiplication, orthogonal ssi la matrice est orthogonale)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto AM$.
Déterminer la C.N.S. sur A pour que f_A soit un isométrie de l'e.v. $M_n(\mathbb{R})$ muni de son p.s. canonique.

Exercice 10. Soit $(E, |)$ un espace euclidien et $x \in E$.
Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
(i) il existe une b.o.n. $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $x = e_1 + \cdots + e_n$.
(ii) $||x|| = \sqrt{n}$.
Indication pour le sens indirect : on pourra commencer par le cas $n = 2$ et penser en terme de rotation.

Endomorphismes symétriques et théorème spectral

Exercice 11 (Une autre démonstration « hermitienne » du résultat clef sur les matrices symétriques)**.** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique. Démontrer que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont en fait réelles, en remarquant d'abord que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, ${}^t\overline{X}.A.X \ \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 (Quasiment du cours)**.** Soit $(E, (\ |\ )$ euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

On note $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ la norme d'opérateur de u (subordonnée au choix de la norme euclidienne dans E) et $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$ le rayon spectral de u.

Alors $\|u\| \overset{(1)}{=} \rho(u) \overset{(2)}{=} \max\limits_{\|x\|=1} |(u(x)|x)|$.

Exercice 13 (Pour réviser la diagonalisation)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $D \in D_3(\mathbb{R})$ et $P \in O_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 14 (Racine n-ièmes d'endo. symétriques, resp. d'endo. sym. pos., CCINP MP 2021)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n, u un endomorphisme symétrique de E.

a) Soit p un entier naturel impair.
   - i) Montrer l'existence d'un endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$
   - ii) Montrer que si v est un endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$ alors v possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres distinctes que u.
   - iii) Montrer l'unicité de l'endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.

b) Soit p un entier naturel pair et non nul.
   - i) A-t-on les mêmes résultats ?
   - ii) Que peut-on dire si u est positif ? (c'est à dire $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$)
   - iii) Que peut-on dire si u et v sont positifs ?

Exercice 15 (Utilisation de la réduction des matrices symétriques réelles)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(A)|^{2/n} \leq \dfrac{1}{n}\|A\|^2$ (où $\|A\|$ est la norme euclidienne canonique).

Exercice 16 (Décomposition utile des endomorphismes symétriques positifs en endo. de rang 1 et réciproque...)**.** Pour E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ symétrique positif, $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de diagonalisation de u, et $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \lambda_n$ son spectre, on apour tout $x \in E$:

$$u(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \cdots + \lambda_n x_n e_n = \lambda_1 (x|e_1) e_1 + \cdots + \lambda_n (x|e_n) e_n.$$

En posant $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ et $u_i = \mu_i e_i$ cette égalité peut s'écrire :

$$\boxed{u(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|u_i) u_i \quad (*)}$$

Intérêt de la formule $(*)$:

Dans la formule $(*)$ qu'on vient d'obtenir $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille orthogonale, cependant on peut s'intéresser aux propriétés plus générale des endormorphismes de la forme $(*)$.

Soit $(u_1, \dots, u_r) \in E^r$ une famille *quelconque* de vecteurs de E et $f \ : x \in E \mapsto \sum\limits_{i=1}^{r} (x|u_i) u_i$.

Montrer qu'alors :

(i) f est symétrique positif,

(ii) $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Vect}(u_i)^\perp = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r)^\perp$

(iii) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r)$

Exercice 17 (Un peu de topologie)**.** a) On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Est-ce que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$?

c) Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est exactement l'intérieur de $S_n^+(\mathbb{R})$.