Banque CCINP : Ex. 29,30.

Calcul de fonctions définies par une intégrale à paramètre via dérivation (± E.D.))

Exercice 1. Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que g est bien définie.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer g', puis g.

Exercice 2 (L'intégrale de la Gaussienne, comme valeur particulière d'une intégrale à paramètre)**.** On note $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$. On considère la fonction $F \ : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$.

a) Préciser l'ensemble de déf. de F, puis montrer qu'elle vérifie (sur un ensemble à préciser) une E.D. dont le second membre fait intervenir G.

b) Résoudre cette E.D. et en remarquant que F est bornée, retrouver ainsi la valeur de G.

c) **Bonus :** A l'aide d'une expression trouvée pour F grâce à l'E.D. obtenir un D.A. à deux termes significatifs de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 3 (Calcul incontournable de la transformée de Fourier de la gaussienne)**.** Soit $g \ : \ t \mapsto e^{-t^2/2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx}dt$.

Calculer h en trouvant une E.D. vérifiée par h.

Exercice 4. Soit $C(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\mathrm{d}t$ et $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\mathrm{d}t$.

a) Montrer la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de C et S.

b) Soit $U = C + iS$. Déterminer un équation différentielle vérifiée par U.

c) Déterminer la forme explicite de U, C et S.

Quelques propriétés de la convolution

Exercice 5. On note $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}_\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on choisit g dans $\mathcal{C}_\mathcal{B}$.

a) **Définition :** Montrer que, si $f \in \mathscr{L}^1$, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. : on pose $(f \star g)(x) = \int_\mathbb{R} f(x-t)g(t)dt$.

b) **Commutativité :** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, (f \star g)(x) = \int_\mathbb{R} g(x-t)f(t)dt = (g \star f)(x)$.

c) **Continuité et bornitude de la convolée** Montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}^1$, $f * g \in \mathcal{C}_\mathcal{B}$

d) **Continuité de l'opérateur :** Montrer que $f \mapsto f \star g$ est une application linéaire entre $\mathscr{L}^1$ et $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ vérifiant
$$\forall\, f \in \mathscr{L}^1,\ N_\infty^\mathbb{R}(f \star g) \leqslant N_1(f) N_\infty^\mathbb{R}(g).$$

e) **Caractère $\mathcal{C}^\infty$ si on convole par une fonction $\mathcal{C}^\infty$:** On suppose $f \in \mathcal{L}^1_\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, g de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec toutes ses dérivées bornées, montrer que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$

Etude d'équivalents

Exercice 6 (Un résultat plus précis que le théorème de la valeur initiale pour un exemple particulier)**.** On considère la transformée de Laplace de Arctan. Autrement dit, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{Arctan}(t)dt$.

Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $f(x)$.

Transformée de Laplace du sinus cardinal : que faire hors du cadre Lebesgue intégrable ?

Exercice 7. En étudiant $L(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}dt$, obtenir la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Indication – On montrera que L est dérivable sur $]0,+\infty[$, on calculera L', qu'on primitivera, puis on montrera la continuité de L en 0 pour obtenir la valeur de $L(0)$.