Intégrales à paramètres

Exercice 1 (Complément sur Γ : tout ce qu'il faut pour tracer l'allure de la courbe)**.**

On suppose connue toutes les propriétés de Γ vues en cours : dérivabilité ($\mathcal{C}^\infty$) et formule $\forall\, x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

a) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$.

b) Montrer qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que Γ est strictement décroissante sur $]0, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

c) Montrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

d) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(\Gamma(x))$.

Exercice 2 (Avec des limites sous le signe intégrale : T.C.D. en variable continue)**.** Soit f définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f. Que dire de la limite de f en $+\infty$?

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$ pour tout réel x non nul. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Dénombrabilité

Exercice 3 (Support d'une famille sommable de réels positifs)**.** Soit I un ensemble quelconque, et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels posiifs indexées par I.

a) Rappeler la définition de : « (u_i) est sommable ».

b) Montrer que si (u_i) est sommable alors l'ensemble $J := \{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ est fini ou dénombrable. Cet ensemble s'appelle le support de la famille.

Indication – On pourra noter pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n := \{i \in I, u_i \geq 1/n\}$. Que dire des ensembles J_n ? Conclure pour J.

Exercice 4. a) Montrer qu'une fonction croissante n'a qu'un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.

Indication – Pour montrer qu'un ensemble est dénombrable, on peut l'injecter dans $\mathbb{Q}$: ici associer à chaque point de discontinuité a l'intervalle $I_a =]\lim_{a^-} f, \lim_{a^+} f[$ et choisir un rationnel dans cet intervalle.

b) Montrer qu'une fonction convexe est dérivable sauf en un nombre au plus dénombrable de points.

Exercice 5 (Deux démonstrations, dues à Cantor, de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$)**.** Plus précisément nous allons montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

(M1) En coupant en trois, avec le théorème des segments emboités Cantor 1873-74

Par l'absurde si $[0,1]$ est dénombrable. Autrement dit on suppose qu'on a $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ bijective, et on note (pour simplifier) $\varphi(n) = r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier la surjectivité de φ donne : $[0,1] = \{r_n, n \in \mathbb{N}\}$: on dit que (r_n) est une énumération de $[0,1]$.

L'idée (géniale) de Cantor, est de couper $[0,1]$ en trois morceaux : $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$. Parmi ces trois intervalles, il y en a au moins un qui ne contient pas r_0.

On choisit le premier (en partant de la gauche) de ces trois intervalles qui ne contient par r_0 et on l'appelle I_0. (Si $r_0 \notin [0,1/3]$, $I_0 = [0,1/3]$, sinon et si $r_0 \notin [1/3,2/3]$, $I_0 = [1/3,2/3]$ et sinon $I_0 = [2/3,1]$).

On suppose ensuite qu'on a construit une suite de segments emboités $I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0$, où à chaque étape $\ell(I_k) = \dfrac{1}{3}.\ell(I_{k-1})$ et $r_k \notin I_k$.

Ainsi I_n, ne contient aucun élément de $\{r_0, \ldots, r_n\}$.

(i) En déduire comment fabriquer I_{n+1} vérifiant les mêmes propriétés à savoir que $I_{n+1} \subset I_n$, $\ell(I_{n+1}) = \dfrac{1}{3}.\ell(I_{k-1})$ et $r_{n+1} \notin I_{n+1}$.

On a ainsi par récurrence fabriqué une suite de segments emboîtés (I_n) dont le diamètre tend vers zéro.

(ii) En considérant $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ montrer une *contradiction.*

(M2) Avec le développement décimal et le procédé diagonal (encore de Cantor).

On suppose encore qu'on a une énumération (r_n) de $[0,1]$ i.e. une bijection $\varphi \;:\mathbb{N} \to [0,1]$, $n \mapsto \varphi(n) = r_n$.

Chaque nombre r_i admet une écriture décimale propre $r_i = 0, r_{i,1}r_{i,2}\dots r_{i,n}\dots$ avec les $r_{i,n} \in [\![0,9]\!]$.

On considère alors le réel $x \in [0,1]$ de la forme $x = 0, x_1\dots x_n\dots$ dont la n-ième décimale x_n est définie comme suit :

- si la n-ième décimale $r_{n,n}$ de r_n est différente de 1 alors $x_n = 1$,
- si $r_{n,n} = 1$ alors $x_n = 2$.

Justifier que ce nombre x (bien défini) ne peut être de la forme r_n pour aucun $n \in \mathbb{N}$. On en déduit l'application $\varphi \;:\; \mathbb{N} \;\to [0,1]$, $n \mapsto r_n$ n'est pas surjective comme on l'avait supposé, *contradiction.*

Commentaire extrait du cours d'analyse de R. Godement : C'est en démontrant ces résultats par des méthodes qui, pour élémentaires qu'elles soient, étaient totalement inconnues avant lui, que Cantor a montré qu'*il existe différentes sortes d'infini*, ce que vingt-cinq siècles de philosophes et théologiens n'avaient apparemment jamais découvert.

Exercice 6. 1) Existences de réels transcendants : l'argument révolutionnaire de Cantor en 1873.

a) Justifier que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

b) Un réel α est dit algébrique ssi il existe un polynôme non nul à coefficients rationnels P tel que $P(\alpha) = 0$. Déduire de ce qui précède que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

c) En déduire qu'il existe des réels transcendants (et beaucoup ! !)

2) Pour autant, il n'est pas si facile d'exhiber des exemples de réels transcendants : le premier exemple avait été donné par Liouville en 1844, le voici en exercice d'analyse :

a) Soit P un fonction polynomiale à coefficients entiers et x une racine réelle de P i.e. vérifiant $P(x) = 0$. Justifier alors qu'il existe un $M > 0$ tel que pour tout rationnel $\frac{a}{b} \in [x-1, x+1]$, on a :

$$|P(\frac{a}{b})| \leq M|x - \frac{a}{b}|.$$

Indication T.A.F.,

b) En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ indépendant de a/b tel que, pour tout rationnel $\frac{a}{b} \in [x-1, x+1]$ tel que $P(\frac{a}{b}) \neq 0$ on ait :

$$|x - \frac{a}{b}| \geq \frac{K}{|b|^m},$$

où m désigne le degré du polynôme P.

c) Montrer que, quitte à changer légèrement la constante K du b) en une constante K', on peut demander qu'on ait le résultat du b), pour tout rationnel $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, et plus seulement dans $[x-1, x+1]$.

d) Soit $L = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$. Montrer que $|L - s_n| \leq \frac{1}{10^{n!}}$.

Indication – Pour chaque $k \geq n+1$, en posant $k = (n+1+i)$ on peut faire la majoration grossière qui suit : $\frac{1}{10^{(n+1+i)!}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!+i}}$.

e) Supposons par l'absurde que L est racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$ de degré m. Montrer alors que pour $n \geq n_0$, $|L - s_n| \geq \frac{K}{(10^{n!})^m}$ et conclure qu'on a une contradiction.