MP 2 **Samedi 7 Janvier 2023**

Devoir surveillé 4 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques ne sont pas autorisés.

On s'intéresse ici aux propriétés des fonctions polylogarithmes, définies comme séries entières et à leur prolongement grâce à une représentation intégrale. On établit aussi quelques formules générales et on complète l'étude par celle du cas particulier du dilogarithme.

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

2) Justifier que l'application L_α est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
3) Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha\left(x^2\right)$$

4) Pour tout $x \in]-1,1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.
Exprimer $L_{\alpha+1}(x)$ sous forme d'une intégrale entre 0 et x faisant intervenir L_α.
5) Pour $x \in]-1,1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0, \alpha = -1$ et $\alpha = 1$.
6) Dans cette question, on suppose que $\alpha \leqslant 1$.
Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures. Pour cela, on pourra chercher à minorer $L_\alpha(x)$ pour $x \in]0,1[$.

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1. On va voir que le phénomène vu à la question (6) ne se produit plus et on va étudier ce prolongement en 1 et au-delà de -1 puis dans le champ complexe.

7) Montrer que la fonction L_α est continue sur $[-1,1]$.
8) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.
9) Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
10) Pour tout réel $x \leqslant 1$, justifier l'existence de $K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du$.
11) Montrer que l'application K_α ainsi définie est continue sur l'intervalle $]-\infty,1]$.
12) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 2$.
Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur l'intervalle $]-\infty,1]$.
13) On revient, pour toute la suite de cette partie, au cas général où $\alpha > 1$.
Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur l'intervalle *ouvert* $]-\infty,1[$.
14) Prouver l'existence de $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ et justifier que $\Gamma(\alpha) > 0$.
15) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a la relation :

$$xK_\alpha(x) = \Gamma(\alpha).L_\alpha(x).$$

On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.
16) Pour tout $x \in]-\infty,1]$, on prolonge la définition de $L_\alpha(x)$ en posant :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du.$$

Montrer que l'application L_α ainsi définie est continue sur $]-\infty,1]$ et de classe C^1 sur $]-\infty,1[$.

17) Montrer que pour tout réel $x \leqslant 1$, on a :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1-xt} \, \mathrm{d}t.$$

18) Justifier que l'on peut prolonger la fonction L_α sur $\mathbb{C} \setminus]1,+\infty[$ par la définition :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus]1,+\infty[, \quad L_\alpha(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z} \, \mathrm{d}u.$$

Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $z^2 \notin]1,+\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha\left(z^2\right).$$

III Etude particulière du dilogarithme ($\alpha = 2$)

On s'intéresse ici, pour tout $x \in [-1,1]$, à : $L_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

Valeurs remarquables et équations fonctionnelles

19) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire, telle que :

$$\forall x \in]0,\pi], f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier $a_0(f) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad \text{et} \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

20) La théorie des séries de Fourier permet de démontrer la *formule de Parseval* suivante (qui est une sorte de généralisation du théorème de Pythagore) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

En *admettant* ce résultat ici, en déduire le calcul de $L_2(1)$ et puis le calcul de $L_2(-1)$ et $K_2(1)$.

21) Soit Φ définie par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x).$$

Montrer que Φ est de classe C^1 sur $]0,1[$ puis qu'elle est constante sur $]\,0,1\,[$ et vaut $L_2(1)$.

22) En déduire la valeur de $L_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

23) Prouver aussi que :

$$\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$$

Ecritures intégrales simples de L_2 et application à un équivalent en $-\infty$:

24) Désormais, on s'intéresse au prolongement de L_2 considéré au II vérifiant en particulier la relation vue à la question 17, dont on partira pour traiter les questions suivantes, c'est-à-dire :

$$\forall x < 0, \quad L_2(x) = -\frac{x}{\Gamma(2)} \int_0^1 \frac{\ln(s)}{1-xs} \, \mathrm{d}s$$

Montrer alors que pour tout $x < 0$, on a aussi les égalités :

$$L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t} \, \mathrm{d}t = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t} \, \mathrm{d}t.$$

25) Pour tout $x < 0$, calculer $g(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1} \, \mathrm{d}t$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

26) Montrer que $h(x) := \displaystyle\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)} \mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to -\infty$.

27) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (L_2(x) - g(x))$.

En déduire enfin un équivalent simple de $L_2(x)$ quand x tend vers $-\infty$.